HESSE

I DETERMINANTI



I DETERMINANTI





I
DETERMINANTI

ELEMENTARMENTE ESPOSTI

DAL

DR. OTTO HESSE

PROFESSORE ORDINARIO NEL REALE POLITECNICO DI MONACO.

Traduzione

DEL

DR. VALERIANI VALERIANO



NAPOLI
LIBRERIA SCIENTIFICA E INDUSTRIALE
DI BENEDETTO PELLERANO
Strada di Chiaia 60.
1873.



Stab. Tip. A. Trani.

IL TRADUTTORE A CHI LEGGE.

Le opere del Dott. Otto Hesse Prof. ordinario di Matematica nel Reale Politecnico di Monaco, sono assai note per la loro eccellenza alla massima parte dei più diligenti cultori delle matematiche discipline, anche in Italia. Esse hanno il pregio rarissimo di unire il vanto dell'originalità a quello di una esposizione facile e ben ordinata, per modo che possono tanto piacere a quei pochi privilegiati ingegni che seppero elevarsi alle più alte sfere della scienza, quanto riuscire veramente accette ai principianti per la loro bontà dal lato didattico.

Gli è in base di queste considerazioni che io mi proponeva tempo fa, di pubblicare la traduzione della maggiore e più completa fra le opere di Hesse: *Vorlesungen über Analytische Geometrie des Raumes*. A tale scopo scrissi all'Autore chiedendogliene l'autorizzazione. L'Autore rispose gentilmente aderendo alla mia proposta, promettendomi di comunicarmi alcune modificazioni, che desidera introdurre nell'ultima edizione del 1869, e nel tempo istesso spedendomi due suoi opuscoli. Uno di questi s'intitola: *Die vier Species*—ed ha lo scopo di esporre nel modo il più semplice e proprio e in pari tempo il più alla portata delle moderne dottrine del calcolo, le quattro operazioni fondamentali del calcolo, con ogni forma di numeri. Il Dott. Hesse con questo suo piccolo lavoro ha voluto toccare una delle più vitali questioni dal lato del metodo, quella in cui l'alunno il più svegliato e l'insegnante più abile e provetto, trovano sempre non lievi difficoltà. Egli vi è riuscito con quella maestria che lo rende tanto singolare ed ammirabile.

L'altro opuscolo inviatomi dall'Hesse, si è il trattatello sui determinanti, di cui pubblicai prima la traduzione nel Giornale di Matematica di Napoli, e della quale traduzione qui si presenta l'estratto.

Come scrivevami l'Illustre Autore, questo libretto benchè di assai recente pubblicazione (fu pubblicato nel 1871) fece tale fortuna da esserne già da qualche tempo del tutto esaurita l'intera edizione; esso è stato pure tradotto in Olandese. Io m'accinsi a voltarlo nel nostro idioma meglio che per me si poteva, non soltanto perchè lo trovai veramente degno di pregio, ma ancora per una ragione analoga a quella che mosse l'Hesse a compilarlo.

I nuovi programmi ministeriali per gli Istituti tecnici Italiani, hanno introdotto lo studio della teoria dei determinanti per la Sezione Fisico-Matematica; inoltre alcuni professori dei Licei amano pure svolgere questa teoria nel loro insegnamento, benchè non venga prescritta dai relativi programmi. Per tutto ciò si rende anche fra noi non solo utile ma necessario, un trattato veramente semplice ed elementare su questa materia, un trattato insomma idoneo alle scuole che preparano alle Università. Anche l'Italia possiede pregevolissimi trattati sui determinanti, come sono quelli del Brioschi, del Bellavitis, del Trudi, ma nessuno ve ne ha di propriamente idoneo a questo scopo. È perciò che io spero la pubblicazione del presente lavoro, abbia a riuscire accetta a tutti i buoni e volonterosi insegnanti.

Macerata Ottobre 1872.

PREFAZIONE DELL'AUTORE.

Per disposizione ministeriale del 5 ottobre 1870 venne compresa fra le materie d'insegnamento nei nostri sei ginnasi reali bavaresi, la teoria dei determinanti.

È bensì vero che l'intelligente insegnante può di leggieri rinvenire nelle opere scientifiche sopra i determinanti, quei principii che si confanno ad una istruzione ristretta; ma gli resta pur sempre a risolvere il men facile problema di ridurre ad unità il materiale raccolto, collegandone organicamente le singole parti.

Io mi sono volentieri sobbarcato a questa fatica, nella fiducia di rendere servigio ai giovani matematici introducendoli per una via agevole, sulla utilissima teoria dei determinanti.

Monaco il 4 Gennaio 1871.

EQUAZIONI LINEARI.

Fin verso il principio di questo secolo non si conosceva altro metodo generale per risolvere le equazioni lineari, che quello di far dipendere, mercè l'eliminazione d'una delle incognite, le equazioni stesse da altre, parimenti lineari, dove non comparisse più quella incognita.

Ripetendo questo processo di eliminazione, si finisce per giungere necessariamente ad una equazione con una sola incognita x, della forma $ax=b$, donde si trae per questa incognita il valore $x=\frac{b}{a}$.

È quindi chiaro che i valori delle incognite soddisfacenti ad un sistema di equazioni lineari, si presentano in forma di frazioni, i cui due termini sono composti mediante quelle quantità che si considerano come note nelle equazioni date. Il modo di tale composizione non apparisce che dopo l'effettivo sviluppo delle prescritte operazioni di calcolo, a vero dire molto tediose.

Un'altra imperfezione del metodo consiste in ciò, che esso introduce nel calcolo fattori superflui, i quali rendono il calcolo stesso tanto più prolisso quanto maggiore è il numero delle equazioni. Ciò si rende palese con un esempio.

Si prendano tre equazioni lineari fra altrettante incognite, e si calcoli il valore di una di queste col metodo preaccennato. Si trova così una frazione, i cui due termini sono della quarta dimensione rispetto alle quantità note. Ma in questi due termini entra un fattore comune del primo grado, soppresso il quale, il valor finale dell'incognita risulta espresso da una frazione, i cui due termini sono della terza dimensione rispetto alle quantità anzidette. È chiaro dunque che il metodo ha introdotto un fattore superfluo di primo grado; epperò sorge il quesito: se si possa evitare tal fattore superfluo nella soluzione di tre equazioni fra tre incognite.

Supponendo per un istante già nota una proposizione che verrà dimostrata più innanzi, cioè che il valore di ciascuna delle incognite d'un sistema di n equazioni lineari fra altrettante incognite è espresso da una frazione i cui due termini sono dell'n^{ma} dimensione rispetto alle quantità note, si può facilmente determi-

nare la dimensione del fattore superfluo. Si trova in tal modo che quando $n > 3$ le dimensioni di tal fattore crescono molto più rapidamente che il numero n.

Lo studio di evitare l'importuno fattore superfluo, nella risoluzione delle equazioni lineari, condusse alla scoperta dei determinanti, cioè di certe espressioni formate colle quantità note, le quali costituiscono le più semplici espressioni dei numeratori e denominatori di quelle frazioni che rappresentano i valori delle incognite. Queste espressioni formeranno il soggetto della terza sezione del presente scritto.

Una terza imperfezione del metodo è la sua mancanza di simmetria. È ben vero che l'ordine tenuto nell'eliminazione delle incognite, per riuscire ad un'equazione con un'incognita sola, non ha influenza sul risultato finale; ma collo scegliere un ordine determinato si dà ad una delle incognite una preferenza ch'essa non possiede affatto nel sistema delle equazioni date. Nasce dunque il desiderio di indagare un metodo che insegni ad eliminare tutte le incognite ad un tratto, meno quella della quale si cerca il valore. Questo scopo si raggiunge col metodo dei fattori indeterminati (dovuto, io credo, a Lagrange, in questo secolo), metodo il quale non è però scevro dagli altri difetti prenotati.

Il metodo dei fattori indeterminati per la risoluzione delle equazioni lineari è il seguente. Si moltiplica ciascuna equazione per un fattore indeterminato e si sommano tutte le equazioni; si determinano poscia i fattori in modo che nella somma delle equazioni riescano nulli i coefficienti di tutte le incognite fuorchè di quella di cui si cerca il valore. Con questo metodo simmetrico di eliminazione si viene assai più facilmente a riconoscere la forma del risultato, donde traggonsi poi alcune proposizioni intorno alle equazioni lineari, che passiamo tosto ad esporre, insieme col metodo stesso.

Tutte le equazioni lineari si possono ridurre alla forma seguente, che è quella donde noi piglieremo le mosse:

$$1)\ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} x^0 = a_0{}^0 x_0 + a_1{}^0 x_1 + \ldots + a_n{}^0 x_n, \\ x' = a_0{}' x_0 + a_1{}' x_1 + \ldots + a_n{}' x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^n = a_0{}^n x_0 + a_1{}^n x_1 + \ldots + a_n{}^n x_n. \end{cases}$$

In queste $(n+1)$ equazioni i simboli $x_0, x_1, \ldots, x_n$ rappresentano le $(n+1)$ incognite. Gli $(n+1)^2$ coefficienti $a_k{}^\lambda$ delle incognite stesse e le $(n+1)$ quantità $x^0, x', \ldots x^n$ sono quantità date ad arbitrio.

Moltiplicando le equazioni date ordinatamente per i fattori $e_k{}^0, e_k{}', \ldots, e_k{}^n$ e sommando, si ottiene:

$$2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ e_k{}^0 x^0 + e_k{}' x' + \ldots + e_k{}^n x^n = x_k,$$

purchè gli $(n+1)$ fattori siano scelti in modo da soddisfare alle equazioni seguenti:

$$3) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} 0 = a_0{}^0 e_k{}^0 + a_0{}' e_k{}' + \ldots + a_0{}^n e_k{}^n , \\ 0 = a_0{}^1 e_k{}^0 + a_1{}' e_k{}' + \ldots + a_1{}^n e_k{}^n , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 = a_k{}^0 e_k{}^0 + a_k{}' e_k{}' + \ldots + a_k{}^n e_k{}^n , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = a_n{}^0 e_k{}^0 + a_n{}' e_k{}' + \ldots + a_n{}^n e_k{}^n . \end{array} \right.$$

Queste equazioni sono lineari ed in numero di $(n+1)$, come i fattori da determinarsi; questi possono dunque essere effettivamente individuati, e, supposto che ne siano stati calcolati i valori, la formula 2) porge il valore di una delle incognite x_k, del dato sistema 1). Resta a vedersi qual vantaggio siasi con ciò conseguito.

Trattavasi di risolvere le equazioni 1), cioè di assegnare i valori di tutte le incognite. Ora la determinazione del valore di una delle incognite è stata fatta dipendere da equazioni lineari del tutto diverse fra i fattori indeterminati. Per risolvere le equazioni lineari 1) rispetto alle $(n+1)$ incognite bisogna quindi risolvere non un solo sistema di equazioni, ma $(n+1)$ sistemi della stessa forma, e ciascun sistema contiene $(n+1)$ altre incognite.

Ora se la risoluzione dei sistemi di equazioni della forma 3) presentasse maggiori difficoltà che quella dell' unico sistema 1), si sarebbe rivocato un problema più facile ad uno più difficile; al tempo stesso però si scorge che il problema più difficile della risoluzione dei sistemi di equazioni della specie testè incontrata, trovasi rivocato ad un unico sistema di equazioni, e questo è certamente un vantaggio che abbiamo ritratto dalla nostra ricerca. Nel fatto però il sistema di equazioni 1) ad $(n+1)$ incognite è fatto dipendere da un sistema con n incognite soltanto. Poichè, dividendo tutte le equazioni 3), ad eccezione della $(k+1)^{ma}$, per $e_k{}^0$, e ponendo $\frac{e_k{}'}{e_k{}^0} = E_k{}', \ldots \frac{e_k{}^n}{e_k{}^0} = E_k{}^n$, si hanno n equazioni lineari con un egual numero di incognite $E_k{}', \ldots E_k{}^n$. Se ora si determinino i valori di queste e si pongano in luogo di $e_k{}', \ldots, e_k{}^n$ le quantità equivalenti $E_k{}' e_k{}^0, \ldots, E_k{}^n e_k{}^0$ nelle equazioni 3), queste rimangono identicamente soddisfatte, ad eccezione della $(k+1)^{ma}$, la quale somministra il valore del fattore $e_k{}^0$, donde si ottengono poscia immediatamente i valori degli altri fattori.

Le $(n+1)^2$ equazioni 3) possono essere acconciamente surrogate dalle due equazioni seguenti, nelle quali k e λ denotano due numeri qualunque disuguali della serie: $0, 1, \ldots, n$:

$$4) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} 0 = a_\lambda{}^0 e_k{}^0 + a_\lambda{}' e_k{}' + \ldots + a_k{}^n e_k{}^n \\ 1 = a_\lambda{}^0 e_\lambda{}^0 + a_\lambda{}' e_\lambda{}' + \ldots + a_\lambda{}^n e_\lambda{}^n . \end{array} \right.$$

Queste $(n+1)^2$ equazioni lineari ad un egual numero di incognite e contengono soltanto gli $(n+1)^2$ coefficienti dati; quindi i

valori delle incognite e sono totalmente indipendenti dalle quantità note $x^0, x', \dots, x^n$ che entrano nelle equazioni 1), e supponendo determinati tali valori, si hanno dalla 2) le seguenti soluzioni del sistema dato 1):

$$5)\dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} x_1 = e_0{}^0 x^0 + e_0{}' x' + \dots + e_0{}^n x^n \\ x_0 = e_1{}^0 x^0 + e_1{}' x' + \dots + e_1{}^n x^n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = e_n{}^0 x^0 + e_n{}' x' + \dots + e_n{}^n x^n . \end{array} \right.$$

Riponendo questi valori delle incognite $x_0, x_1, \dots, x_n$ nelle equazioni 1), queste devono risultar soddisfatte qualunque valore abbiano le quantità note $x^0, x', \dots x^n$. Introducendo adunque i detti valori nella $(\lambda + 1)^{ma}$ equazione 1):

$$x^\lambda = a_0{}^\lambda x_0 + a_1{}^\lambda x_1 + \dots + a_n{}^\lambda x_n ,$$

essa deve risultar soddisfatta indipendentemente dai valori delle quantità note $x^0, x', \dots x^n$; vale a dire che i coefficienti di queste quantità devono essere eguali fra loro nei due membri dell'equazione. Eguagliando questi coefficienti si ottengono così le equazioni:

$$6)\dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} 0 = a_0{}^\lambda e_0{}^k + a_1{}^\lambda e_1{}^k + \dots + a_n{}^\lambda e_n{}^k \\ 1 = a_0{}^\lambda e_0{}^\lambda + a_1{}^\lambda e_1{}^\lambda + \dots + a_n{}^\lambda e_n{}^\lambda . \end{array} \right.$$

Si ponga mente a ciò, che queste equazioni possono essere dedotte dalle equazioni 4) permutando tutti gl'indici superiori delle quantità a ed e coi corrispondenti indici inferiori.

Queste due equazioni 6) rappresentano di nuovo un complesso di $(n+1)^2$ equazioni lineari ad un egual numero di incognite. Come le equazioni 4), esse danno luogo ad $(n+1)$ sistemi di equazioni fra $(n+1)$ incognite, con questo solo divario che le incognite vi sono ordinate diversamente.

Per risolvere le date equazioni 1) mediante le 5), è indifferente calcolare le $(n+1)^2$ incognite mediante le equazioni 4) o mediante le equazioni 6). Ma questa osservazione ci conduce ad indagare qual sia il sistema di equazioni lineari che si risolve coll'ajuto delle equazioni 6) in quella guisa istessa che il sistema delle equazioni 1) si risolve coll'ajuto delle equazioni 4).

Poichè le equazioni 4) si convertono nelle 6) permutando tutti gl'indici superiori dei coefficienti a e delle incognite e coi loro indici inferiori, è chiaro che il sistema richiesto non può essere che il seguente:

$$7)\dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} u_0 = a_0{}^0 u^0 + a_0{}' u' + \dots + a_0{}^n u^n \\ u_1 = a_1{}^0 u^0 + a_1{}' u' + \dots + a_1{}^n u^n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n = a_n{}^0 u^0 + a_n{}' u' + \dots + a_n{}^n u^n , \end{array} \right.$$

dove le $u^0, u', \dots, u^n$ sono considerate come incognite, e tutte le altre quantità come note. Le soluzioni saranno le seguenti:

$$8)\ldots\ldots\ldots \begin{cases} u^0 = e_0{}^0 u_0 + e_1{}^0 u_1 + \ldots + e_n{}^0 u_n \\ u' = e_0{}' u_0 + e_1{}' u_1 + \ldots + e_n{}' u_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u^n = e_0{}^n u_0 + e_1{}^n u_1 + \ldots + e_n{}^n u_n. \end{cases}$$

Infatti, moltiplicando ordinatamente le equazioni 7) per $e_0{}^\lambda, e_1{}^\lambda, \ldots e_n{}^\lambda$, e sommando, si ottiene, in virtù delle equazioni 6), la $(\lambda+1)^{ma}$ equazione 8).

Benchè i proposti sistemi di equazioni lineari 1) e 7) non siano stati ancora effettivamente risoluti, si può tuttavia, in virtù di quanto precede, enunciare la proposizione seguente:

9) *Se in due sistemi lineari di equazioni le linee orizzontali dei coefficienti* a *delle incognite dell'un sistema sono ordinatamente eguali alle colonne verticali dei coefficienti dell'altro sistema, anche nelle soluzioni dell'un sistema le linee orizzontali dei coefficienti* e *sono ordinatamente eguali alle colonne verticali dei coefficienti nelle soluzioni dell'altro sistema.*

Le linee orizzontali dei coefficienti a nel dato sistema di equazioni 1) riescono eguali alle corrispondenti colonne verticali, ove si ammetta che per ogni valore di k e λ sia $a_k{}^\lambda = a_\lambda{}^k$. Ponendo inoltre $x^k = u_k$, ciò che è lecito, poichè queste $2n+2$ quantità date possono avere valori arbitrarii, i due sistemi di equazioni 1) e 7) non differiscono l'uno dall'altro che nella segnatura delle incognite. E siccome, in tali condizioni, essi devono avere le medesime soluzioni, qualunque siano i valori delle quantità note x^k, così dal confronto dei risultati si ottiene $e_k{}^\lambda = e_\lambda{}^k$.

L'esattezza dell'equazione $e_k{}^\lambda = e_\lambda{}^k$ nell'ipotesi $a_k{}^\lambda = a_\lambda{}^k$, si può dimostrare più semplicemente mediante l'equivalenza dei due sistemi di equazioni 4) e 6). Ma non è neppur necessario di supporre nota questa equivalenza, che fu dimostrata precedentemente, poichè essa può essere provata anche direttamente, senza l'intervento dei sistemi 1) e 7).

Il teorema $e_k{}^\lambda = e_k{}^\lambda$, subordinato all'ipotesi $a_k{}^\lambda = a_\lambda{}^k$, si può enunciare in breve così:

10) *Se in un sistema di equazioni lineari le linee orizzontali dei coefficienti delle incognite sono eguali alle corrispondenti linee verticali dei coefficienti nel medesimo sistema, la stessa eguaglianza ha pur luogo nelle soluzioni del sistema.*

I teoremi testè dimostrati si possono verificare col calcolo diretto per $n=1$, ovvero $=2$, ovvero $=3$, ma non già per valori di n maggiori di 3. Non si può dunque a meno di ravvisare in queste proposizioni una tal quale poesia della scienza, la quale giunge a predire, per via di logiche deduzioni, certe proprietà generali delle equazioni lineari, le quali non potrebbero mai essere stabilite col calcolo diretto.

Notiamo per ultimo che in virtù dell'equazione 4) le sostituzioni 1) e 8) rendono identica l'equazione seguente:

$$11)\ldots x^0u^0 + x'u' + \ldots + x^nu^n = x_0u_0 + x_1u_1 + \ldots + x_nu_n.$$

A questa medesima equazione conducono, in virtù delle equazioni 6) equivalenti alle 4), le sostituzioni 5) e 7). Egli è perciò che l'equazione identica 11) in certo modo compendia in sè stessa tanto il sistema 4) quanto l'equivalente sistema 6). Si potrebbe quindi assumere l'equazione 11) come punto di partenza, e ricavarne tutto ciò che si è fin qui stabilito, procedendo a un dipresso così: Si scrivano le formole di sostituzione 1) e 8), per introdurre in luogo delle variabili $x^0, x', \ldots, x^n$ ed $u^0, u', \ldots, u^n$ le variabili $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e $u_0, u_1, \ldots, u_n$. I coefficienti a ed e di queste sostituzioni non sono del tutto arbitrarii; essi devono esser tali che le sostituzioni 1) e 8) rendano identica l'equazione 11). Posto ciò, tutto si riduce a dimostrare che dalle sostituzioni 1) e 8) conseguono le sostituzioni 5) e 7).

Le equazioni lineari 1) non sono state propriamente risolute colle formole 5). Non si è fatto altro che rivocarne la risoluzione a quella delle equazioni lineari 4) ovvero 6). Effettivamente le equazioni lineari generali della forma 1) non si possono risolvere senza il sussidio dei determinanti, volendo evitare i fattori superflui già rammentati. Però il sussidio dei determinanti può essere sostituito, in casi speciali, da certi procedimenti ingegnosi, dei quali vogliamo ora porgere un esempio.

Abbiansi a risolvere le equazioni 1) nell'ipotesi che tutti gl'indici superiori dei coefficienti a siano veri esponenti. In questa ipotesi i coefficienti a nella prima equazione divengono tutti eguali all'unità. Nella seconda equazione essi sono quantità arbitrarie, nella terza essi sono i loro quadrati, e così di seguito.

Moltiplicando ordinatamente le equazioni 1) per i fattori $e_k^0, e_k', e_k'', \ldots, e_k^n$, e sommando, si ottiene l'equazione 2), supposto che i fattori siano determinati in modo da soddisfare le equazioni 3). Ora se per un istante si risguardano come già determinati questi fattori, emerge chiaramente dalla forma delle equazioni 3) che $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$ sono le radici dell'equazione di grado n:

$$0 = a^0e_k^0 + a'e_k' + \ldots + a^ne_k^n.$$

Il secondo membro di questa equazione si può decomporre in fattori, come è noto dalla teoria delle equazioni algebriche, in guisa da avere l'identità:

$$a^0e_k^0 + a'e'_k + \ldots + a^ne_k^n$$
$$= e_k^n (a - a_0) \ldots (a - a_{k-1}) (a - a_{k+1}) \ldots (a - a_n).$$

Ponendo in questa equazione a_k al posto di a, ed osservando che, in virtù della $(k+1)^{ma}$ equazione 3), il suo primo membro è eguale all'unità, si ottiene un'equazione che determina il fattore

e_k^n esistente nel secondo membro dell'equazione. Ponendo il valore di questo fattore nell'equazione precedente, si ottiene quest'altra, che è identica rispetto ad a:

$$12)\ldots\left\{\begin{aligned} &a^0e_k^0 + a'e_k' + \ldots + a^ne_k^n \\ &= \frac{(a-a_0)\ldots(a-a_{k-1})(a-a_{k+1})\ldots(a-a_n)}{(a_k-a_0)\ldots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\ldots(a_k-a_n)}. \end{aligned}\right.$$

Fin qui si son supposti noti i fattori $e_k^0, e_k', \ldots, e_k^n$; ma essi si possono appunto dedurre da questa equazione identica 12). Infatti, se il secondo membro, che contiene soltanto la variabile a insieme con quantità note, si svolge secondo le potenze di a, chiaro apparisce che i coefficienti di queste diverse potenze sono appunto le quantità da determinarsi $e_k^0, e_k', \ldots, e_k^n$.

Bisogna dunque fare lo sviluppo del secondo membro dell'equazione identica 12) per avere effettivamente dalla 2) il valore dell'incognita x_k. V'è però un caso nel quale si può scrivere il risultato senza fare questo sviluppo, ed è quando gl'indici superiori nelle date equazioni 1) sono veri esponenti non solo nei coefficienti, ma ancora nelle quantità note $x^0, x', \ldots, x^n$, le quali in tal caso diventano le potenze di una medesima quantità x. Infatti in quest'ipotesi, scrivendo x in luogo di a, il primo membro dell'equazione identica 12) si converte nel primo membro dell'equazione 2). Quindi, in virtù dell'equazione identica 12), il valore di x_k è dato, nel caso ultimamente supposto, dalla formola seguente:

$$\frac{(x-a_0)\ldots(x-a_{k-1})(x-a_{k+1})\ldots(x-a_n)}{(a_k-a_0)\ldots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\ldots(a_k-a_n)} = x_k.$$

Quando dunque tutti gl'indici superiori nelle equazioni 1) sono veri esponenti, le soluzioni di queste equazioni sono le seguenti:

$$13)\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{aligned} x_0 &= \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots(a_0-a_n)} \\ x_1 &= \frac{(x-a_0)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_n)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \frac{(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_0)(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-1})}. \end{aligned}\right.$$

Ora è facile comprendere dalla considerazione delle equazioni 2) e 12), che se gl'indici superiori non fossero veri esponenti che pei coefficienti a, si otterrebbero egualmente i valori delle incognite del sistema 1) sviluppando l'espressione 13) secondo le potenze di x e mutando, dopo lo sviluppo, gli esponenti in indici superiori. Sottintendendo dunque tale operazione, le equazioni 13) porgono le soluzioni simboliche delle date equazioni 1), nell'ipotesi che gl'indici superiori dei coefficienti a, e non già delle quantità note x, siano veri esponenti.

In virtù del teorema 9), non è necessario risolvere partitamente, in questa stessa ipotesi, le equazioni 7); poichè quel teorema insegna il modo di ricavare le loro soluzioni da quelle delle 1) dianzi formate. Ciò non di meno, vogliamo risolvere direttamente anche le equazioni 7).

Supponendo già trovati i valori delle incognite $u^0, u', \dots, u^n$ nelle equazioni 7), l'ispezione di queste equazioni mostra che $u_0, u_1, \dots, u_n$ non sono altro che gli $(n+1)$ valori assunti dalla data funzione intera dell'n^{mo} grado:

$$x^0u^0 + x'u' + \dots + x^nu^n$$

in corrispondenza agli $(n+1)$ valori $a_0, a_1, \dots, a_n$ della variabile x. Ora l'algebra insegna il modo di comporre una funzione intera dell'n^{mo} grado mediante gli $(n+1)$ valori dati della variabile, e ciò mediante la formula seguente;

$$14)\dots\dots\dots \left\{ \begin{aligned} & x^0u^0 + x'u' + \dots + x^nu^n \\ & = u_0 \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(a-a_n)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\dots(a_0-a_n)} \\ & + u_1 \frac{(x-a_0)(x-a_2)\dots(x-a_n)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\dots(a_1-a_n)} \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + u_n \frac{(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_0)(a_n-a_1)\dots(a_n-a_{n-1})} . \end{aligned} \right.$$

Questa equazione compendia in certo modo in sè stessa le soluzioni delle equazioni 7). Poichè, sviluppando il suo secondo membro secondo le potenze della variabile x ed eguagliando i coefficienti delle eguali potenze di x nei due membri dell'equazione, si otterranno le effettive soluzioni delle equazioni 7).

La formola 13) porge, invero simbolicamente, le soluzioni delle equazioni 1), nell'ipotesi che gl'indici superiori dei coefficienti siano veri esponenti. Nella medesima ipotesi le soluzioni dell'equazioni 7) sono date anch'esse simbolicamente dall'equazione identica 14). È pregio dell'opera il verificare sopra queste soluzioni la proposizione 9), che abbiamo dimostrata indipendentemente dalla detta ipotesi.

Il problema algebrico, di spezzare in frazioni semplici una frazione il cui numeratore e il cui denominatore siano funzioni intere di una quantità, conduce anch'esso, noti che siano i fattori lineari del denominatore, a determinare i numeratori delle frazioni semplici per mezzo di equazioni lineari, che possono esser risolute con un processo elegante, senza intervento di fattori superflui. Si potrebbero trovare ancora altre equazioni lineari speciali, trattabili elegantemente in simil guisa. Ma per conseguire le soluzioni generali delle equazioni lineari, scevre da fattori superflui, non si hanno fino ad ora altri mezzi che i determinanti.

FUNZIONI ALTERNANTI.

Un' espressione matematica formata di due o più elementi si chiama *funzione simmetrica* degli elementi, quando essa rimane invariata per qualsivoglia permutazione degli elementi fra loro. La funzione simmetrica è *intera*, quando risulta dalla somma di termini in cui gli elementi e le loro potenze non entrino che come fattori.

Una funzione simmetrica intera di $(n+1)$ elementi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ha la proprietà che ogni suo termine ne trae in generale più altri con sè. Se, per esempio, uno dei termini della funzione simmetrica è ca_0, essa deve per definizione contenere anche i termini $ca_1, ca_2, \ldots ca_n$. Se per *più semplice* funzione simmetrica s' intende quella i cui termini non contengono altri fattori che le prime potenze di alcuni degli elementi, si può dire senz'altro che ogni termine di una funzione simmetrica semplice trae con sè tutti gli altri. Ciò non ha più luogo quando si tratti di una funzione simmetrica non semplice.

Nella teoria delle funzioni algebriche non si può far senza delle funzioni simmetriche. Poichè, se si prescinde dagli elementi, questa teoria deriva da due teoremi fondamentali, che vengono dimostrati prima d'ogni altro; e cioè dai seguenti: 1) i coefficienti di un' equazione sono esprimibili per funzioni simmetriche intere delle radici; e viceversa: 2) ogni funzione simmetrica intera delle radici di un' equazione è esprimibile in funzioni intere dei coefficienti. Noi non vogliamo in ciò che segue dimostrare queste proposizioni, nè ritornare in alcun modo sovr' esse; ne facciamo menzione soltanto per ricordare in generale l'importanza delle funzioni simmetriche nell'algebra, e per rannodare a note teorie lo studio di un'altra specie di funzioni alternanti, le quali hanno grande affinità colle funzioni simmetriche.

Funzione alternante di due o più elementi dicesi quella il cui valore assoluto non cambia per qualunque permutazione degli elementi, mentre cambia di segno se vi si permutano fra loro due elementi qualunque. Per esempio, (a_1-a_0) ed $(a_1-a_0)(a_2-a_0)(a_2-a_1)$ sono funzioni di questa specie di due o di tre elementi. Noi non avremo da considerare che funzioni alternanti intere, quali sono appunto le citate.

La funzione alternante ha in comune colla funzione simmetrica la proprietà, che ogni termine trae con sè altri termini della fun-

zione medesima. Un termine qualunque della funzione alternante di $(n+1)$ elementi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ avrà sempre la forma:

$$c a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_k^{\alpha_k} \ldots a_\lambda^{\alpha_\lambda} \ldots a_n^{\alpha_n},$$

dove $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono esponenti interi, alcuno dei quali può anche esser nullo.

Questo termine, per la definizione della funzione alternante, trae con sè quest' altro:

$$-c a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_\lambda^{\alpha_k} \ldots a_k^{\alpha_\lambda} \ldots a_n^{\alpha_n};$$

il quale, prescindendo dal segno, si deduce dal precedente permutando fra loro gli elementi a_k, a_λ, e torna a convertirsi nel primitivo se vi si ripete tale permutazione.

La somma dei due termini contiene il fattore:

$$\left(a_k^{\alpha_k} a_\lambda^{\alpha_\lambda} - a_\lambda^{\alpha_k} a_k^{\alpha_\lambda}\right).$$

Uno degli esponenti α_k, α_λ è di necessità maggiore dell'altro; poichè se fossero eguali, i due termini si eliderebbero e non figurerebbero affatto nella funzione alternante.

Ponendo quindi $\alpha_\lambda = \alpha_k + p$, il fattore anzidetto ha la forma:

$$a_k^{\alpha_k} a_\lambda^{\alpha_k}\left(a_\lambda^{p} - a_k^{p}\right).$$

Il binomio $a_\lambda^p - a_k^p$ è esattamente divisibile per $a_\lambda - a_k$, come emerge dalla formola:

$$\frac{a_\lambda^p - a_k^p}{a_\lambda - a_k} = a_\lambda^{p-1} + a_\lambda^{p-2} a_k + \ldots + a_k^{p-1}$$

delle progressioni geometriche. Quindi $a_\lambda - a_k$ è un fattore della somma dei due termini considerati. Se ora i termini della funzione alternante si aggruppano a due a due, al modo dei precedenti, $a_\lambda - a_k$ sarà pure fattore in ogni altra coppia di termini, e quindi sarà fattore nella intera funzione. Possiamo dunque enunciare il teorema seguente:

Una funzione alternante intera di più elementi ha per fattore la differenza di due qualunque degli elementi.

Segue da ciò che ogni funzione alternante intera deve avere per fattore il prodotto delle differenze degli elementi presi a due a due in tutti i modi possibili.

Epperò ogni funzione alternante intera A di $(n+1)$ elementi a ha per fattore il prodotto seguente:

$$15) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} P = (a_1 - a_0)\,(a_2 - a_0) \ldots (a_n - a_0) \\ (a_2 - a_1) \ldots (a_n - a_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_n - a_{n-1}), \end{aligned} \right.$$

il che può esprimersi coll' equazione:

$$A = S \cdot P.$$

Se si fa astrazione dal primo fattore $a_1 - a_0$, le due prime linee orizzontali di fattori nel prodotto P si convertono l'una nell'altra permutando fra loro gli elementi a_0 e a_1, mentre i fattori rimanenti non cambiano affatto. E siccome tale permutazione non fa cambiare che il segno al primo fattore, così si vede che il prodotto P è una funzione alternante degli elementi a_0 ed a_1. Ma è facile convincersi ch'esso è funzione alternante di tutti gli $(n+1)$ elementi. Infatti si aggruppino i fattori contenuti in P nel modo seguente:

$$\pm P = (a_k - a_\lambda)\, \Pi\, (a_{k'} - a_k)\, \Pi\, (a_{\lambda'} - a_\lambda)\, \Pi\, (a_{k'} - a_{\lambda'}).$$

dove k' e λ' denotano i numeri $0, 1, \ldots, n$, esclusi i numeri k e λ; $\Pi(a_{k'} - a_k)$ denota il prodotto dei fattori $(a_{k'} - a_k)$, ecc. La permutazione degli elementi a_k e a_λ non fa che cambiare il segno al primo fattore $(a_k - a_\lambda)$, il secondo ed il terzo prodotto Π si convertono l'uno nell'altro, e l'ultimo prodotto Π rimane del tutto invariato.

Poichè dunque il prodotto P è esso stesso una funzione alternante degli $(n+1)$ elementi a, l'equazione precedente $A = S \cdot P$ dimostra che S è una funzione simmetrica, e che il prodotto P è la più semplice funzione alternante intera dei detti elementi. In altri termini: *Ogni funzione alternante intera di più elementi ha per fattore la più semplice funzione alternante degli stessi elementi.*

Le ricerche seguenti avranno appunto per oggetto questa più semplice funzione alternante P, considerata specialmente nella sua forma esplicita.

Contando dal basso all'alto il numero dei fattori del prodotto P, risulta $= 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, e ciascuno di questi fattori è un binomio. Il prodotto sviluppato di 2 binomii, dà 2^2 termini, il prodotto di 3 binomii dà 2^3 termini. Il nostro prodotto P sviluppato conterrebbe dunque $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ termini, se nessuno di essi si elidesse con un altro eguale e di segno contrario. Nel caso di $n = 2$ si verifica che 2 termini si elidono. Nel caso di $n = 3$ si elidono 40 dei 64 termini dati dalla regola, cosicchè ne rimangono soltanto 24.

Anticiperemo fin d'ora l'espressione del vero numero dei termini sussistenti nello sviluppo del nostro prodotto P, il quale è $= 1 \cdot 2 \ldots (n+1)$, affinchè si vegga quanti termini del prodotto si dovrebbero scrivere inutilmente, ove lo si sviluppasse direttamente colle regole note per la moltiplicazione di più binomii.

Nel caso di $n=4$ il prodotto eseguito secondo queste regole generali comprenderebbe 1024 termini, i quali, in virtù di scambievoli elisioni, si ridurrebbero in fatto a 120. Il calcolo diretto ci obbligherebbe quindi a scrivere in questo caso 1024—120 termini superflui. Questa circostanza rende oltremodo desiderabile

un metodo, che insegni a scrivere i termini dello sviluppo del prodotto P, senza far intervenire anche quei moltissimi che si elidono. Un metodo cosiffatto scaturirà dal considerare il prodotto P come una funzione alternante.

Si ottiene un primo termine positivo dello sviluppo del prodotto P, sopprimendo nei binomii che ne formano i fattori tutti i termini negativi, ed è:

16)...................... $+ a_0^0 a_1^1 \dots a_n^n$.

Questo primo termine della funzione alternante P trae con sè un secondo termine negativo della funzione medesima, il quale, prescindendo dal segno, si ottiene da quello permutando due elementi qualunque, ovvero, come d'ora innanzi diremo, due degli indici inferiori $0, 1, 2, \dots n$ apposti agli elementi a. Da questo secondo termine negativo deriva nuovamente un terzo termine positivo, colla successiva permutazione di due altri indici inferiori, e così di seguito.

Di qui si raccoglie che il primo termine positivo 16) della funzione alternante P trae con sè un gran numero di altri termini, appunto come succede nelle funzioni simmetriche. Questi termini, prescindendo per ora dai segni, derivano tutti dal primo termine positivo 16) mediante la permutazione degli indici inferiori $0, 1, 2, \dots, n$. Il loro numero, comprendendo il primo termine, è quindi eguale al prodotto $1 \cdot 2 \dots (n+1) = \Pi(n+1)$.

Quanto poi ai segni di questi $\Pi(n+1)$ termini, essi deduconsi da quello del primo termine positivo, riflettendo che due termini della funzione alternante hanno segni opposti, quando l'uno di essi deriva dall'altro mediante la permutazione di due indici inferiori.

Ora dimostreremo che lo sviluppo della funzione alternante P non può contenere altri termini all'infuori dei detti $\Pi(n+1)$, derivanti dal primo termine positivo 16).

Qualunque altro termine dello sviluppo del prodotto P non può avere altra forma che questa:

$$\pm a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \dots a_k^{\alpha_k} \dots a_\lambda^{\alpha_\lambda} \dots a_n^{\alpha_n},$$

ed è impossibile che due esponenti siano in esso eguali fra loro. Infatti se α_k e α_λ fossero eguali fra loro, il termine considerato si eliderebbe con quell'altro termine della funzione alternante P che è di segno opposto e che deriva dal detto termine permutando fra loro gl'indici inferiori k e λ. Ora poichè ciascun binomio che entra nel prodotto P porge un fattore per la formazione del termine indicato, la somma $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ deve essere eguale al numero dei fattori del prodotto P, cioè a $\frac{n(n+1)}{2}$. Ma non esistono altri numeri interi e disuguali $\alpha_0, \alpha_1, \dots\dots, \alpha_n$ aventi per somma $\frac{n(n+1)}{2}$, fuorchè i numeri $0, 1, \dots n$; dunque gli espo-

nenti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ del termine considerato sono appunto i numeri $0, 1, \ldots, n$ disposti in un cert'ordine. Ora ordinando i varii fattori di questo termine per esponenti crescenti, si scorge che il termine stesso appartiene già ai $\Pi(n+1)$ termini della funzione alternante. Possiamo dunque dire che *ogni termine della più semplice funzione alternante di più elementi trae con sè tutti gli altri termini, appunto come avviene per le più semplici funzioni simmetriche.*

Tornando ora allo sviluppo del prodotto P nella 15), non si moltiplicheranno già i fattori binomiali fra loro. poichè si verrebbe ad introdurre inutilmente una moltitudine di termini i quali poi si eliderebbero a vicenda; ma si partirà dal termine iniziale positivo 16) per formare tutti i $\Pi(n+1)$ termini dello sviluppo del prodotto P mediante la mutazione degl'indici inferiori nel termine iniziale medesimo, senza badare dapprima ai segni. I segni di questi $\Pi(n+1)$ termini si determineranno poi in relazione al termine iniziale positivo 16), tenendo bene a mente che due termini hanno sempre segno contrario quando l'uno deriva dall'altro colla permutazione di due indici inferiori.

Chiamando p il prodotto P quando gli elementi sono tre, e sviluppandolo colla regola esposta, si trova:

$$17) \ldots. p = +a_0^0 a_1^1 a_2^2 - a_0^0 a_2^1 a_1^2 - a_1^0 a_0^1 a_2^2 + a_1^0 a_2^1 a_0^2 + a_2^0 a_0^1 a_1^2 - a_2^0 a_1^1 a_0^2.$$

Anche nel caso di quattro elementi lo sviluppo del prodotto P ha una certa importanza pratica, sapendosi che questo sviluppo, contenente 12 termini positivi e 12 negativi, serve in geometria analitica, sotto certe condizioni, ad esprimere il volume di un tetraedro individuato per mezzo dei vertici.

I $\Pi(n+1)$ termini dello sviluppo del prodotto P ottengonsi ancora, prescindendo dal segno. colla permutazione degli esponenti $0, 1, \ldots., n$ nel termine iniziale 16). Se dimostreremo che ogni termine ricavato da un altro mediante la permutazione di due esponenti, ha segno opposto a quello, potremo dire che la stessa regola serve a ricavare l'intero prodotto dal termine iniziale 16), sia mediante la permutazione degli esponenti, sia mediante quella degli indici. Procediamo appunto a questa dimostrazione.

Indicando con $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ gli esponenti $0, 1, \ldots, n$ disposti in un ordine qualunque, ogni termine dello sviluppo del prodotto P è della forma:

$$18) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \pm a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_k^{\alpha_k} \ldots a_\lambda^{\alpha_\lambda} \ldots a_n^{\alpha_n}.$$

Permutando due indici inferiori k e λ si deduce da esso l'altro termine:

$$19) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mp a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_\lambda^{\alpha_k} \ldots a_k^{\alpha_\lambda} \ldots a_n^{\alpha_n}.$$

Ora questo termine si ottiene del pari dal primitivo permutando fra loro i due esponenti α_k e α_λ.

Le osservazioni fin qui fatte intorno allo sviluppo del prodotto P, si possono dunque enunciare brevemente così:

20) *Basta conoscere un solo termine dello sviluppo del prodotto P, per dedurne tutti gli altri in due modi diversi. Prescindendo dai segni, essi si ottengono, sia permutando gl' indici inferiori degli elementi, sia permutandone gli elementi. La determinazione dei segni emerge dal fatto, che due termini hanno segno contrario quando l' uno deriva dall' altro colla permutazione di due indici inferiori, o di due esponenti.*

Sviluppando nella seconda maniera il prodotto p delle differenze di tre elementi mediante il solito termine iniziale, si trova:

$$p=+a_0^0a_1^1a_2^2-a_0^0a_1^2a_2^1-a_0^1a_1^0a_2^2+a_0^1a_1^2a_2^0+a_0^2a_1^0a_2^1-a_0^2a_1^1a_2^0,$$

in perfetto accordo collo sviluppo 17). Qui si scorge che nello sviluppo del prodotto p è lecito permutare gli esponenti cogli indici inferiori corrispondenti, senza punto alterare lo sviluppo. In virtù del teorema 20), lo stesso può dirsi dello sviluppo del prodotto P mediante il termine iniziale. Siccome questa osservazione ci sarà utile più tardi, così la formuleremo a modo di teorema nel modo seguente:

21) *Lo sviluppo del prodotto* P *rimane invariato se vi si permutino tutti gli esponenti cogli indici inferiori corrispondenti.*

Terminiamo questa sezione, che aveva per oggetto le proprietà delle più semplici funzioni alternanti, enunciando due proposizioni, la cui verità è resa manifesta da ciò che precede, ma che amiamo formulare distintamente perciò ch' esse troveranno il loro riscontro nella sezione seguente:

22) *Lo sviluppo del prodotto* P *cambia soltanto di segno se vi si permutino fra loro due indici inferiori o due esponenti.*

23) *Lo sviluppo del prodotto* P *si annulla, se al posto di un indice inferiore si pone un altro indice inferiore, ovvero se al posto di un esponente si pone un altro esponente.*

La prima di queste due proposizioni non fa che esprimere in altre parole la proprietà fondamentale della funzione alternante P e nella sua seconda parte si appoggia alla proposizione 21). L' ultima proposizione afferma semplicemente che il prodotto P si annulla quando si annulla uno dei suoi fattori, e nella seconda parte fa parimenti uso della proposizione 21).

DETERMINANTI.

Nell'algebra e nell'analisi non è punto indifferente la scelta dei simboli che debbon designare le quantità sulle quali vuolsi operare. E per vero, questi simboli devono in qualche maniera qualificare le quantità da essi rappresentate. Anche nella segnatura delle operazioni da eseguirsi colle quantità date si fa palese un sottile magistero, che i nostri predecessori ci appresero e che noi abbiamo recato a maggior perfezione. Nè certamente si esagera affermando che la risoluzione di molti problemi dipende puramente e semplicemente dalla scelta opportuna dei simboli.

Gli è perciò che nella sezione antecedente abbiamo designati $(n+1)$ elementi della stessa specie colla lettera a ed abbiamo apposti a questa lettera i numeri 0, 1, ... n come indici inferiori, dinotanti il numero degli elementi. E dianzi trattando delle equazioni lineari, abbiamo rappresentati gli $(n+1)^2$ coefficienti delle incognite colla segnatura a_k^λ, per rammentare coll'indice inferiore k l'incognita cui appartiene il coefficiente, e coll'indice superiore λ l'equazione nella quale si trova il coefficiente medesimo. L'indice superiore λ fu altresì scelto per esser usato come esponente in un caso speciale.

La presente sezione tratterà di una espressione composta di $(n+1)^2$ elementi del tutto indipendenti fra loro, i cui indici inferiori del pari che i superiori indicano una certa uniformità nella disposizione degli elementi. Questa espressione si chiama determinante.

24) *Se nel prodotto* P 15), *sviluppato mediante il suo termine iniziale* 16), *si riguardano tutti gli esponenti come indici superiori, ciò che si ottiene è il determinante degli* $(n+1)^2$ *elementi* a.

In base a questa definizione se nell'espressione P 17) si considerano gli esponenti come indici superiori, si ha nell'espressione stessa un vero e proprio determinante di 9 elementi. In generale un determinante di $(n+1)^2$ elementi a non differisce punto, quanto alla scrittura, dallo sviluppo del prodotto P. Ma quelli che sono indici superiori nel determinante, sono invece esponenti nello sviluppo del prodotto P. Perciò il determinante si converte nel prodotto P, dando il significato di esponenti agli indici superiori degli elementi. Il determinante è dunque un'espressione gene-

rale di cui il prodotto P è un caso particolare. Questa osservazione conduce a ricercare fin dove si possono estendere ai determinanti le proprietà del prodotto P espresso nella sezione precedente.

In virtù di quanto abbiamo esposto, la proposizione 20) dimostrata nella sezione precedente si può qui enunciare nel modo seguente:

24) *Basta conoscere un sol termine d'un determinante per poterne dedurre tutti gli altri in due modi diversi. Prescindendo dal segno essi deduconsi colla permutazione degl'indici inferiori o degl'indici superiori. I segni si determinano con questa regola, che due termini hanno segno contrario quando l'uno deriva dall'altro in virtù della permutazione di due indici inferiori o di due indici superiori.*

Poichè la conoscenza di un sol termine del determinante basta per dedurre tutti gli altri, si può far uso di esso per simboleggiare l'intero determinante. Ordinariamente sceglicsi per tal uopo il termine iniziale positivo, e si rappresenta il determinante A composto di $(n+1)^2$ elementi, col simbolo sommatorio:

25) .... $A = \Sigma \pm a_0{}^0 a_1{}^1 \dots a_n{}^n$.

Il segno positivo sottinteso prima di Σ esprime che il termine iniziale scritto è positivo: il doppio segno che sussegue al simbolo Σ avverte che i termini del determinante hanno alternativamente il segno positivo e negativo

Scegliendo altri termini per simboleggiare il determinante, ottengonsi per esso segnature diverse. Considerando per esempio il determinante A completamente sviluppato 17) per il caso di 9 elementi:

$$26)\dots\begin{cases} A = \Sigma \pm a_0{}^0 a_1{}^1 a_2{}^2 = a_0{}^0 a_1{}^1 a_2{}^2 - a_0{}^0 a_2{}^1 a_1{}^2 - a_1{}^0 a_0{}^1 a_2{}^2 \\ \qquad + a_1{}^0 a_2{}^1 a_0{}^2 + a_2{}^0 a_0{}^1 a_1{}^2 - a_2{}^0 a_1{}^1 a_0{}^2 \end{cases}$$

si scorge ch'esso si può scrivere in diverse guise come segue:

$$A = \Sigma \pm a_0{}^0 a_1{}^1 a_2{}^2, \quad A = -\Sigma \pm a_0{}^0 a_2{}^1 a_1{}^2, \quad A = -\Sigma \pm a_1{}^0 a_0{}^1 a_2{}^2,$$
$$A = \Sigma \pm a_1{}^0 a_2{}^1 a_0{}^2, \quad A = \Sigma \pm a_2{}^0 a_0{}^1 a_1{}^2, \quad A = -\Sigma \pm a_2{}^0 a_1{}^1 a_0{}^2,$$

e in altri modi ancora ricorrendo al secondo sviluppo di p dato nella sezione precedente.

Adottando quindi la segnatura 25), si può in generale simboleggiare in moltissime maniere uno stesso determinante di $(n+1)^2$ elementi. Se infatti si scrive nella formula 25), in luogo del termine iniziale positivo $a_0{}^0 a_1{}^1 \dots a_n{}^n$, un altro termine iniziale qualunque, senza riguardo al suo segno, la sommatoria Σ dev'essere preceduta dal segno che il nuovo termine iniziale ha nello sviluppo del determinante. Rappresentando dunque con $\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_n$ i numeri $0, 1, \dots n$ presi in un ordine qualunque, e con $\beta_0, \beta_1, \dots \beta_n$ i numeri medesimi presi nello stesso o in altro ordine, il deter-

minante A della formula 25), composto di $(n+1)^2$ elementi, si può simboleggiare generalmente così:

$$27) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A = \pm \Sigma \pm a_{\beta_0}^{\alpha_0} a_{\beta_1}^{\alpha_1} \ldots . a_{\beta_n}^{\alpha_n} .$$

Il segno anteposto alla sommatoria dev'essere positivo o negativo secondo che è positivo o negativo il segno del termine iniziale nello sviluppo del determinante.

Questa ambiguità di segnatura di un medesimo ente, del determinante, potrebbe sembrare illogica. Ma se si considera che ciascuna particolare segnatura è come il riflesso di una particolare proprietà del determinante, si accoglieranno di buon grado i diversi modi di simboleggiarlo. E l'universa analisi, non si riduce infine a quest'unico problema, d'investigare come espressioni diverse di forma, possano eguagliare l'unità? (*)

La segnatura 25) del determinante A, segnatura dove non figurano che $(n+1)$ elementi, è generalmente adottata; ma talvolta essa non è sufficiente per accennare, nel simbolo stesso del determinante, certe operazioni da eseguirsi sugli altri suoi elementi. Ciò condusse ad adottare contemporaneamente un'altra segnatura, la quale contiene tutti gli elementi del determinante ed è la seguente:

$$28) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A = \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, \ldots a_n^0 \\ a_0^1, & a_1^1, \ldots a_n^1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0^n, & a_1^n, \ldots a_n^n \end{vmatrix}$$

Il termine iniziale positivo, che serviva nella segnatura 25) ad indicare il determinante A, si ottiene in questa nuova segnatura facendo il prodotto degli $(n+1)$ elementi posti sulla diagonale del quadrato composto di tutti gli elementi.

Chiamasi *linea* ogni complesso di $(n+1)$ elementi posti l'uno accanto dell'altro; *colonna* ogni complesso di $(n+1)$ elementi posti l'uno sotto l'altro. (**)

(*) *Nota del traduttore.* Se alla parola analisi si dà il suo senso formale, essa non è effettivamente altro che la scienza delle trasformazioni delle espressioni e in particolare delle equazioni quando si tratti dell'analisi algebrica propriamente detta. Essa insegna quindi a trasformare l'espressione A in un'espressione equivalente B e quindi a stabilire l'identità $\frac{A}{B} = 1$, oppure a trasformare l'equazione $A = B$ in un'equazione equivalente $a = b$ e quindi a stabiliro le identità $\frac{A}{B} = \frac{a}{b} = 1$.

(**) *Nota del traduttore.* Aggiunta fatta al testo per mettere la traduzione in rapporto colla fraseologia adottata.

3

Come ogni linea o colonna somministra un solo fattore per la formazione del termine iniziale positivo, così ne somministra un solo per ogni altro termine del determinante. Infatti si è veduto che in ogni termine del determinante tanto gl'indici superiori quanto gl'inferiori comprendono tutti i numeri 0, 1, ... n disposti in un cert'ordine.

Essendosi già osservato che lo sviluppo del determinante A non differisce punto, quanto alla forma, da quello del prodotto P, si può, in virtù del teorema 21), dire che:

29) *In un determinante è lecito permutare tutti gl'indici superiori degli elementi coi corrispondenti indici inferiori, senza alterare il determinante stesso.*

Ne risulta che il determinante A può essere simboleggiato tanto nel modo indicato dalla formola 28) quanto nel seguente:

$$30) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad A = \begin{vmatrix} a_0^0, & a_0^1, \ldots a_0^n \\ a_1^0, & a_1^1, \ldots a_1^n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_n^0, & a_n^1, \ldots a_n^n \end{vmatrix}$$

Come dal teorema 21) si dedusse il 29), dal teorema 22) emerge il seguente:

31) *Un determinante non cambia che il segno se vi si permutino, in ogni termine, due indici inferiori o due indici superiori.*

Sono esempii di permutazione degl'indici inferiori nel determinante 26) a 9 elementi, le diverse segnature date ivi di esso.

Il teorema 31) può, in relazione alla segnatura 28) e 30) del determinante, enunciarsi nel modo seguente:

32) *Un determinante cambia segno se vi si permutino gli elementi corrispondenti di due linee o di due colonne.*

Così tutti i teoremi dimostrati nella sezione precedente rispetto al prodotto P, sono stati riportati al determinante A, ad eccezione dell'ultimo 23) di cui ci rimane a trovare il riscontro.

A questo scopo trascriviamo i due termini di segno opposto 18) e 19) dello sviluppo del prodotto P,

$$\pm a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_k^{\alpha_k} \ldots a_\lambda^{\alpha_\lambda} \ldots a_n^{\alpha_n}$$

$$\pm a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_\lambda^{\alpha_k} \ldots a_k^{\alpha_\lambda} \ldots a_n^{\alpha_n},$$

osservando che come l'uno di questi trae con sè l'altro mercè la permutazione degl'indici inferiori k e λ di due degli $(n+1)$ elementi a, così ad ogni termine dello sviluppo del prodotto P corrisponde un altro termine individuato di segno contrario. Il completo sviluppo del prodotto P consta pertanto di coppie di termini, l'uno dei quali trae con sè sempre l'altro di segno opposto, in virtù della permutazione di due indici inferiori k e λ.

Per la definizione 24) questa coppia di termini diventa una coppia di termini del determinante A, qualora agli esponenti α si attribuisca il significato di indici superiori. Ma poichè questa coppia di termini si annulla, come è chiaro, ove si scriva in luogo dell' indice inferiore λ dell' elemento a l' indice inferiore k, sia che le lettere α denotino veri esponenti, sia che denotino indici superiori, così si annullano nello stesso modo tutte le altre coppie di termini del determinante, epperò questo determinante si annulla scrivendo l' indice k al posto dell' inferiore λ. In grazia delle molteplici sue applicazioni, giova enunciare il teorema ora dimostrato, nelle due forme seguenti:

33) *Un determinante si annulla identicamente se vi si scrive dovunque in luogo di un indice inferiore un altro indice inferiore, ovvero in luogo di un indice superiore un altro indice superiore.*

34) *Un determinante si annulla identicamente se vi si suppongono fra loro eguali gli elementi corrispondenti di due linee o di due colonne.*

Ne consegue che il determinante A della formola 27) si annulla eguagliando fra loro due numeri interi α oppure due numeri interi β. Questa osservazione verrà in acconcio più oltre, nella dimostrazione del teorema sulla moltiplicazione de' determinanti.

Immaginando l'effettivo sviluppo del determinante A, è chiaro che molti dei $\Pi(n+1)$ termini del medesimo contengono l' elemento a_k^λ come fattore. Raccogliendo tutti questi termini del determinante, aventi a_k^λ per fattore comune, si ottiene un'espressione della forma $a_k^\lambda A_k^\lambda$, cioè un prodotto nel quale il secondo fattore A_k^λ rappresenta la somma dei detti termini liberati dal fattor comune. Questo secondo fattore si chiama *Determinante minore.* Poichè adunque ad ognuno degli $(n+1)^2$ elementi del determinante, corrisponde un determinante minore, si hanno tanti determinanti minori quanti sono gli elementi. Su questi determinanti minori si aggiungono le considerazioni seguenti.

Seguendo la definizione ora data possiamo facilmente scrivere tutti i determinanti minori del determinante A di 9 elementi 26):

$$35)\begin{cases} A_0^0 = (a_1^1a_2^2-a_2^1a_1^2), \; A_1^0=-(a_0^1a_2^2-a_2^1a_0^2), \; A_2^0 = (a_0^1a_1^2-a_1^1a_0^2) \\ A_0^1=-(a_1^0a_2^2-a_2^0a_1^2), \; A_1^1 = (a_0^0a_2^2-a_2^0a_0^2), \; A_2^1=-(a_0^0a_1^2-a_1^0a_0^2) \\ A_0^2 = (a_1^0a_2^1-a_2^0a_1^1), \; A_1^2=-(a_0^0a_2^1-a_2^0a_0^1), \; A_2^2=(a_0^0a_1^1-a_1^0a_0^1). \end{cases}$$

Essi si possono esprimere anche in forma di determinanti di soli 4 elementi, nel modo seguente:

$$36)\ldots\begin{cases} A_0^0 = \Sigma\pm a_1^1a_2^2, & A_1^0=-\Sigma\pm a_0^1a_2^2, & A_2^0 = \Sigma\pm a_0^1a_1^2 \\ A_0^1=-\Sigma\pm a_1^0a_2^2, & A_1^1 = \Sigma\pm a_0^0a_2^2, & A_2^1=-\Sigma\pm a_0^0a_1^2 \\ A_0^2 = \Sigma\pm a_1^0a_2^1, & A_1^2=-\Sigma\pm a_0^0a_2^1, & A_2^2 = \Sigma\pm a_0^0a_1^1. \end{cases}$$

È agevole riconoscere che il determinante minore A_k^λ si può derivare dal determinante $A = \Sigma \pm a_0^0 a_1^1 a_2^2$ sopprimendo nel termine iniziale positivo di questo (che è quello sottoposto al simbolo sommatorio) l'indice inferiore k, il superiore λ ed un fattore a, senza variare l'ordine degli altri indici, indi facendo precedere il detto simbolo dal segno $(-1)^{k+\lambda}$. Questa regola vale per la formazione de' determinanti minori di un determinante qualunque.

In base alla definizione del determinante minore A_k^λ del determinante generale A 25) la somma di tutti i termini del determinante che contengono il fattore a_k^λ è $= a_k^\lambda A_k^\lambda$. Ora se un termine qualunque del determinante minore A_k^λ contenesse l'indice inferiore k, il prodotto di questo termine per a_k^λ darebbe un termine del determinante con due indici inferiori eguali a k. E poichè un tal termine non può trovarsi nel determinante come non lo può un termine contenente due indici superiori eguali a λ, si può dire che:

37) *In un determinante minore* A_k^λ *non può esistere alcun termine gli elementi del quale abbiano un indice inferiore* k *ovvero un indice superiore* λ.

Tra le relazioni che sussistono fra il determinante, gli elementi e i determinanti minori, vogliamo anzitutto notare le seguenti:

$$38) \ldots\ldots \begin{cases} A = a_0^\lambda A_0^\lambda + a_1^\lambda A_1^\lambda + \ldots a_n^\lambda A_n^\lambda \\ 0 = a_0^k A_0^\lambda + a_1^k A_1^\lambda + \ldots a_n^k A_n^\lambda . \end{cases}$$

Infatti rammentando la derivazione del determinante A dal suo termine iniziale positivo $a_0^0 a_1^1 \ldots a_n^n$ mediante la permutazione degl'indici inferiori, si scorge che il determinante non può contenere che termini aventi il fattore a_0^λ, ovvero $a_1^\lambda, \ldots$ o infine a_n^λ. Essendo esclusi i termini d'altra specie, basta la semplice definizione dei determinanti minori per dar ragione della prima equazione 38). La seconda equazione scaturisce da questa, scrivendo nel determinante A, l'indice superiore k in luogo dell'indice superiore λ, e ricordando i teoremi 33) e 37).

La prima equazione 38) dimostra che il determinante A si converte nel suo proprio minore A_k^λ ponendovi $a_0^\lambda = 0$, $a_1^\lambda = 0, \ldots$ $\ldots a_k^\lambda = 1, \ldots a_n^\lambda = 0$, vale a dire che si ha:

$$A_k^\lambda = \begin{vmatrix} a_0^0 & \ldots a_k^0, & a_{k+1}^0, & \ldots a_n^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots 1, & 0, & \ldots 0 \\ a_0^{\lambda+1} & \ldots a_k^{\lambda+1}, & a_{k+1}^{\lambda+1}, & \ldots a_n^{\lambda+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^n & \ldots a_k^n, & a_{k+1}^n, & \ldots a_n^n \end{vmatrix}$$

o più semplicemente (rammentando dal teorema 37), che l'attuale

determinante minore non può contenere nei suoi termini l'indice inferiore k):

$$A_k^\lambda = \begin{vmatrix} a_0^0, & \dots 0, & a_{k+1}^0, & \dots a_n^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & \dots 1, & 0, & \dots 0 \\ a_0^{\lambda+1}, & \dots 0, & a_{k+1}^{\lambda+1}, & \dots a_n^{\lambda+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^n, & \dots 0, & a_{k+1}^n, & \dots a_n^n \end{vmatrix}.$$

Ne risulta che ogni determinante minore è di nuovo un determinante dello stesso ordine di quello da cui dipende, ritenuto che l'ordine di un determinante si misuri dal numero delle linee o delle colonne. Ma come nel caso del determinante A 26) del terzo ordine, i determinanti minori 36) sono esprimibili in forma di determinanti d'ordine immediatamente inferiore, cioè del secondo, così anche in generale i determinanti minori di un dato determinante sono esprimibili in forma di determinanti d'ordine immediatamente inferiore. Gli è ciò che ci proponiamo ora di dimostrare.

A tenore del teorema 24) il determinante A deriva dal suo termine iniziale positivo permutando tutti gl'indici inferiori e determinando i segni dei termini secondo la regola prescritta. I termini che contengono il fattore a_0^0, derivano dunque dal termine iniziale positivo permutando gl'indici inferiori $1, 2, \dots n$ e determinando i segni secondo la detta regola La somma di questi termini è, per la definizione di determinante, eguale a $a_0^0 \Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \dots a_n^n$. Ma per definizione del determinante minore A_0^0, la somma di questi termini è eguale a $a_0^0 A_0^0$, dunque:

39) .... $A_0^0 = \Sigma \pm a_1^1 a_2^2 \dots a_n^n$,

formola che rappresenta il determinante minore A_0^0 in forma di determinante d'ordine immediatamente inferiore ad A.

Usando in luogo della segnatura 25) del determinante la segnatura 28), si vede che basta sopprimere in questa la linea e la colonna che contengono a_0^0 per ottenere il minore corrispondente all'elemento a_0^0, in forma di determinante d'ordine inferiore.

Questa regola per la formazione dei minori, nella forma ora detta, trovasi così dimostrata soltanto per il determinante minore A_0^0 corrispondente al primo elemento a_0^0 della diagonale del determinante A. Ma se si considera che permutando fra loro le linee o le colonne, il determinante, prescindendo dal segno, non cambia, si scorge che in virtù di questa semplice permutazione ogni elemento del determinante può essere trasportato al posto del primo. Eseguito per tal modo il trasporto di un elemento qualunque a_k^λ al primo posto della diagonale, torna ad essere applicabile la regola precedente e si può dire quindi:

40) *Ogni determinante minore di un dato determinante, è un determinante d'ordine immediatamente inferiore.*

Per ottenere l'effettiva espressione dei determinanti minori A_k^λ, incomincereme dal trasformare il determinante 28). Permutiamo la $(\lambda+1)^{ma}$ linea colla λ^{ma}. Nel determinante così mutato permutiamo nuovamente la λ^{ma} linea colla $(\lambda+1)^{ma}$ e così di seguito, finchè la $(\lambda+1)^{ma}$ linea del determinante 28) sia passata al posto della prima. Siccome ognuna di queste permutazioni, muta soltanto il segno del determinante A, così dopo il passaggio della $(\lambda+1)^{ma}$ linea al posto della prima il determinante che si ottiene moltiplicato per $(-1)^\lambda$ è eguale ad A. Nel determinante anzidetto si può di nuovo trasportare la $(k+1)^{ma}$ colonna al posto della prima. Il determinante che ne risulta moltiplicato per $(-1)^k$, è eguale al dato A. Ora il determinante finale, che moltiplicato per $(-1)^{k+\lambda}$ è eguale ad A, contiene l'elemento a_k^λ nel vertice della diagonale. Sopprimendovi la prima linea e la prima colonna, si ottiene il determinante minore A_k^λ. Il risultato di questa ricerca può essere enunciato come segue in forma di teorema:

41) *Se nel determinante* A 28) *si sopprime la linea e la colonna in cui trovasi l'elemento* a_k^λ, *e si riempiono le lacune così prodotte spostando parallelamente gli elementi, si ottiene un determinante d'ordine immediatamente inferiore che moltiplicato pel fattore* $(-1)^{k+\lambda}$ *costituisce il determinante minore* A_k^λ *corrispondente all'elemento* a_k^λ.

Usando la segnatura 25) del determinante A, questo teorema si può esprimere brevemente mediante l'equazione seguente:

$$42)\ A_k^\lambda=(-1)^{k+\lambda}\Sigma\pm a_0^0\ldots a_{k-1}^{k-1}a_{k+1}^{k}\ldots a_\lambda^{\lambda-1}a_{\lambda+1}^{\lambda+1}\ldots a_n^n,$$

ove si suppone $\lambda>k$. Nel caso contrario si ha:

$$43)\ A_k^\lambda=(-1)^{k+\lambda}\Sigma\pm a_0^0\ldots a_{\lambda-1}^{\lambda-1}a_\lambda^{\lambda+1}\ldots a_{k-1}^{k}a_{k+1}^{k+1}\ldots a_n^n.$$

Se k e λ sono eguali fra loro si ha:

$$44)\ \ldots\ldots\ A_k^k=\Sigma\pm a_0^0\ldots a_{k-1}^{k-1}a_{k+1}^{k+1}\ldots a_n^n.$$

Le formole 36) servono di conferma alle formole generali 42)–44).

Questo modo di esprimere i determinanti minori in forma di determinanti d'ordine immediatamente inferiore, è scaturito dalle relazioni 38) fra determinante, determinanti minori, ed elementi. Ma fra essi hanno luogo ancora le relazioni seguenti:

$$45)\ \ldots\ldots \begin{cases} A=a_\lambda^0A_\lambda^0+a_\lambda^1A_\lambda^1+\ldots+a_\lambda^nA_\lambda^n \\ 0=a_k^0A_\lambda^0+a_k^1A_\lambda^1+\ldots+a_k^nA_\lambda^n. \end{cases}$$

La prima di queste equazioni si deduce dallo sviluppo del determinante A mediante la permutazione degl'indici inferiori nel termine iniziale, e dalla definizione di determinante minore. La

seconda equazione segue dalla prima sostituendo nel determinante A un indice inferiore k ad un altro indice inferiore λ, e ponendo mente ai teoremi 33) e 37).

I numeri 38) e 45) contengono tutte le relazioni che sono necessarie per la risoluzione dei due sistemi di equazioni lineari 1) e 6). Questi sistemi si compendiano nelle due equazioni seguenti:

$$46) \ldots\ldots\ldots \; x^{\mu} = a_0^{\mu} x_0 + a_1^{\mu} x_1 + \ldots + a_n^{\mu} x_n$$

$$47) \ldots\ldots\ldots \; u_{\mu} = a_{\mu}^{0} u^{0} + a_{\mu}^{1} u^{1} + \ldots + a_{\mu}^{n} u^{n}.$$

Moltiplicando l'equazione 46) per A_{λ}^{μ}, ponendo indi in luogo di μ i numeri successivi $0, 1, \ldots n$ e sommando, spariscono dal secondo membro dell'equazione tutte le incognite, tranne la x_{λ} che vi figura col fattore A, e ciò in virtù della 45). Così moltiplicando l'equazione 47) per A_{μ}^{λ}, ponendo indi in luogo di μ i numeri successivi $0, 1, \ldots n$ e sommando spariscono dal primo membro dell'equazione tutte le incognite, tranne la u^{λ}, che vi figura col fattore A, e ciò in virtù della 38).

Si hanno quindi le soluzioni seguenti delle equazioni 46) e 47):

$$48) \ldots\ldots\ldots \; A\, x_{\lambda} = x^0 A_{\lambda}^{0} + x^1 A_{\lambda}^{1} + \ldots + x^n A_{\lambda}^{n}$$

$$49) \ldots\ldots\ldots \; A\, u^{\lambda} = u_0 A_0^{\lambda} + u_1 A_1^{\lambda} + \ldots + u_n A_n^{\lambda}.$$

In base a ciò i valori delle incognite si presentano come frazioni col denominator comune A. Le dimensioni dei loro termini rispetto alle quantità che son risguardate come note nelle equazioni lineari, corrispondono al numero delle equazioni, ossia delle incognite. Questo fatto, che ora soltanto trovasi dimostrato, era già stato da noi preannunciato nella prima sezione all'uopo di porre in chiaro i difetti del metodo di eliminazione.

Le incognite x_{λ} e u^{λ} dei sistemi 46) e 47) possono anche esprimersi in forma di frazioni i cui due termini sono determinanti di egual ordine. La conoscenza dei determinanti minori supposta nelle formole 48) e 49), riesce superflua esprimendo le incognite nel modo che segue, in base alle segnature 30) e 28):

$$50) \ldots \; x_{\lambda} = \begin{vmatrix} a_0^0, & a_0^1, & \ldots & a_0^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^0, & x^1, & \ldots & x^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^0, & a_n^1, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0^0, & a_0^1, & \ldots & a_0^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\lambda}^0, & a_{\lambda}^1, & \ldots & a_{\lambda}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^0, & a_n^1, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}$$

$$51) \ldots \; u^{\lambda} = \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, & \ldots & a_n^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_0, & u_1, & \ldots & u_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0^n, & a_1^n, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0^0, & a_1^0, & \ldots & a_n^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0^{\lambda}, & a_1^{\lambda}, & \ldots & a_n^{\lambda} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0^n, & a_1^n, & \ldots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

L'equazione 50) non differisce che nella forma dalla 48), se si considera che il determinante A della prima equazione 45) si converte nel secondo dell'equazione 48) scrivendo $x^0, x^1, \ldots x^n$ in luogo di $a_\lambda^0, a_\lambda^1 \ldots a_\lambda^n$. In simil guisa dall'equazione 49) deriva la 51).

Le equazioni 48) e 49) dimostrano nuovamente il teorema enunciato nel numero 9).

Se nei sistemi 46) e 47) si pone $x^\mu = u_\mu$ per ogni valore di μ, e se si suppone inoltre $a_k^\lambda = a_\lambda^k$ per ogni coppia di valori di k, λ, i sistemi stessi non differiscono più che per la segnatura delle incognite. In tali condizioni le loro soluzioni devono essere rispettivamente eguali fra loro e propriamente indipendenti dalle quantità x^μ, che, insieme colle loro eguali u_μ, possono assumere valori qualsivogliano. Ma ciò non è possibile se non si abbia $A_\lambda^0 = A_0^\lambda$, $A_\lambda^1 = A_1^\lambda, \ldots$ e generalmente $A_\lambda^k = A_k^\lambda$, si ha quindi il teorema che segue:

52) *Se in un determinante ogni elemento è eguale a quello che se ne deduce permutando fra loro i due indici, l'egual proprietà ha luogo pei determinanti minori corrispondenti a questi elementi.*

Di qui, avendo riguardo alle equazioni 46) ed alle loro soluzioni 48) si deduce nuovamente il teorema 10) relativo alle equazioni lineari.

Qualcuno potrà chiedere per avventura se mediante le deduzioni fin qui svolte noi abbiamo realmente risoluto un sistema di equazioni lineari generali. La risposta a questa domanda dipende dal punto di vista che si sceglie: Infatti se non si tien conto del lavoro necessario per lo sviluppo di dati determinanti, la formola 50) porge la risoluzione effettiva del sistema generale di equazioni lineari 46). Nel caso contrario si hanno solamente, in quel che precede, le tracce per la risoluzione delle tre equazioni lineari seguenti:

$$53) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} x^0 = a_0^0 x_0 + a_1^0 x_1 + a_2^0 x_2 \\ x^1 = a_0^1 x_0 + a_1^1 x_1 + a_2^1 x_2 \\ x^2 = a_0^2 x_0 + a_1^2 x_1 + a_2^2 x_2. \end{cases}$$

Le loro soluzioni si deducono dalla 48):

$$54) \ldots\ldots \begin{cases} x_0 = \frac{1}{A} \{ x^0 A_0^0 + x^1 A_0^1 + x^2 A_0^2 \} \\ x_1 = \frac{1}{A} \{ x^0 A_1^0 + x^1 A_1^1 + x^2 A_1^2 \} \\ x_2 = \frac{1}{A} \{ x^0 A_2^0 + x^1 A_2^1 + x^2 A_2^2 \} \end{cases}$$

Il significato dei simboli che indicano il determinante A ed i suoi determinanti minori si trova nelle formole 26) e 35). Repu-

tiamo del tutto superfluo introdurre nelle formole 54) i valori ivi riportati, giacchè si otterrebbero per le incognite x espressioni complicate difficili a ritenersi ed a maneggiarsi.

Non gioverebbe affatto lo scrivere distesamente i valori delle incognite ricavati da 4 equazioni lineari, se si riflette che trattasi di frazioni i cui numeratori e denominatori constano di 24 termini ciascuno.

Colla risoluzione delle equazioni lineari è strettissimamente collegato il problema della eliminazione delle incognite fra equazioni lineari. Supponendo dato un sistema di $(n+1)$ equazioni lineari ad n incognite $y_1, y_2, \dots y_n$.

55) .... $0 = a_0^\mu + a_1^\mu y_1 + \dots + a_n^\mu y_n$

si possono far servire le prime n equazioni, per esempio, per ricavare i valori delle incognite. Ponendo poscia questi valori nell'ultima equazione, questa in generale non si troverà soddisfatta. Piuttosto dovrà verificarsi una equazione di condizione fra le quantità note delle equazioni 55), perchè possano sussistere simultaneamente le $(n+1)$ equazioni fra n incognite. Il problema dell'eliminazione consiste appunto nello stabilire questa equazione di condizione sotto la sua forma più semplice.

A tale scopo rendiamo omogenee le equazioni 55) ponendo: $y_k = \frac{x_k}{x_0}$ e moltiplicando per x_0. Esse assumono così la forma:

56) .... $0 = a_0^\mu x_0 + a_1^\mu x_1 + \dots + a_n^\mu x_n$.

Sotto questa forma esse diventano un caso speciale delle equazioni 46), corrispondono cioè all'ipotesi $x^0 = x^1 = \dots = x^n = 0$. Ora le soluzioni 48) delle equazioni 46) non sono altro che le equazioni medesime sotto altra forma; quindi nel caso in discorso abbiamo $Ax_k = 0$. Ma perchè una almeno delle quantità $x_0, x_1, \dots x_n$ deve essere diversa da zero, si deve avere finalmente $A = 0$, come risultato della eliminazione delle incognite dal sistema di equazioni 55). Ciò si può enunciare brevemente nel teorema che segue:

57) *Il risultato dell'eliminazione di* $(n+1)$ *incognite fra un egual numero di equazioni lineari omogenee si ottiene ponendo eguale a zero il determinante formato coi coefficienti delle incognite.*

Se, come nel numero 55), le equazioni date non sono omogenee, si possono rendere tali nel modo che si è veduto e quindi applicarvi il teorema 57).

Nel caso di due equazioni $M = 0$ ed $N = 0$ ad una sola incognita, l'eliminazione delle incognite non presenta veruna difficoltà, se le equazioni sono lineari. Ma se le equazioni sono rispettivamente dell'm^o e dell'n^o grado rispetto all'incognita, ciò che precede non ci porge alcuna regola per effettuare la eliminazione. Ma un ingegnoso artificio di Bezout permette di ridurre l'eliminazione d'una incognita fra due equazioni di grado qualunque,

all'eliminazione di più incognite fra equazioni lineari. Ecco come questo autore raggiunge siffatto intento.

Le equazioni date $M=0$ ed $N=0$ siano rispettivamente dell'm^{mo} e dell'n^{mo} grado. Insieme ad esso hanno luogo le equazioni:

$$M=0,\quad xM=0,\quad x^2M=0,\ldots x^{n-1}M=0$$

$$N=0,\quad xN=0,\quad x^2N=0,\ldots x^{m-1}N=0.$$

Sviluppando queste $(m+n)$ equazioni secondo le potenze di $x, x^2, \ldots x^{m+n-1}$ come incognite, esse divengono equazioni lineari. In tale concetto si hanno dunque $(m+n)$ equazioni lineari fra $(m+n-1)$ incognite, l'eliminazione delle quali può, secondo la regola esposta conseguirsi mediante i determinanti. Se in luogo di due equazioni con una sola incognita, se ne hanno tre con due incognite, non si conosce finora alcun processo di eliminazione che soddisfi a tutte le condizioni volute, a quel modo che vi soddisfa quello insegnato da Bezout per due equazioni.

Le cose precedenti dimostrano l'utilità dei determinanti soltanto in un senso, cioè rispetto all'algebra. Ma vi sono altre proprietà dei determinanti le quali ne estendono il dominio sull'intera analisi. Perciò noi proseguiamo nella esposizione di queste proprietà.

Moltiplicando la prima equazione 38) per un fattore ρ, si vede che il secondo membro dell'equazione è ciò che si ottiene ponendo nel determinante A, $\rho a_0^\lambda, \rho a_1^\lambda, \ldots \rho a_n^\lambda$ in luogo di $a_0^\lambda, a_1^\lambda, \ldots a_n^\lambda$ rispettivamente. Avendo riguardo alla proposizione 29) questa osservazione si può così esprimere:

58) *Moltiplicando tutti gli elementi di una linea o di una colonna del determinante per uno stesso fattore, il nuovo determinante risulta eguale al prodotto del determinante primitivo per questo fattore.*

Ponendo nella prima delle equazioni 38) $a_0^\lambda+\rho a_0^k$, $a_1^\lambda+\rho a_1^k, \ldots$ $\ldots a_n^\lambda+\rho a_n^k$ rispettivamente in luogo di $a_0^\lambda, a_1^\lambda, \ldots a_n^\lambda$ questa equazione non viene alterata, poichè in virtù della seconda equazione 38) è nullo il fattore di ρ nel secondo membro dell'equazione. In base alla 29) possiamo dire:

59) *Il determinante rimane invariato aggiungendo agli elementi di una linea o di una colonna, gli elementi corrispondenti di un'altra linea o di un'altra colonna tutti moltiplicati per un medesimo fattore.*

In conseguenza di ciò agli elementi di una linea o di una colonna si possono aggiungere gli elementi corrispondenti di più altre linee o colonne senza che il determinante venga alterato.

La prima delle equazioni 38) dimostra che il determinante A si riduce al prodotto $a_k^\lambda A_k^\lambda$ ove si pongano eguali a zero tutti gli elementi $a_0^\lambda, a_1^\lambda, \ldots a_{k-1}^\lambda, a_{k+1}^\lambda, \ldots a_n^\lambda$. In tale ipotesi, potendosi considerare l'elemento a_k^λ come un determinante di primo ordine,

il determinante A si spezza nel prodotto di due determinanti d'ordine inferiore. Ciò rientra come caso particolare in un teorema generale, del quale ci gioverà porgere un'idea chiara, innanzi di darne l'enunciato finale.

Assumiamo perciò il determinante A nella forma 28) e dividiamolo con due tratti in croce, l'uno orizzontale fra l'm^{ma} e l'$(m+1)^{ma}$ linea, l'altro verticale fra l'm^{ma} ed $(m+1)^{ma}$ colonna nel modo che segue:

$$\left|\begin{array}{llll|ll} a_0^0, & a_1^0, & \dots & a_{m-1}^0 & a_m^0, & \dots a_n^0 \\ a_0^1, & a_1^1, & \dots & a_{m-1}^1 & a_m^1, & \dots a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^{m-1}, & a_1^{m-1}, & \dots & a_{m-1}^{m-1} & a_m^{m-1}, & \dots a_n^{m-1} \\ \hline a_0^m, & a_1^m, & \dots & a_{m-1}^m & a_m^m, & \dots a_n^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0^n, & a_1^n, & \dots & a_{m-1}^n & a_m^n, & \dots a_n^n \end{array}\right|$$

Con ciò il determinante viene decomposto in due quadrati divisi per metà dalla diagonale, e in due rettangoli situati da bande opposte della diagonale. Supponendo ora che tutti gli elementi contenuti in un rettangolo, per esempio in quello situato al di sopra della diagonale, siano eguali a 0, si potrà affermare, per analogia, che il determinante A si risolve nel prodotto di due determinanti rappresentati dai due quadrati, nel seguente modo:

$$A = \Sigma \pm a_0^0 \dots a_{m-1}^{m-1} \, \Sigma \pm a_m^m \dots a_n^n.$$

La verità di questa affermazione dovrà dimostrarsi in base alla supposizione che si annullino tutti gli elementi collocati in questo rettangolo:

$$\begin{array}{l} a_m^0 \quad \dots a_n^0 \\ a_m^1 \quad \dots a_n^1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_m^{m-1} \dots a_n^{m-1}. \end{array}$$

Tutti i termini del determinante A derivano dal loro termine iniziale positivo:

$$a_0^0 \, a_1^1 \dots a_{m-1}^{m-1} \, a_m^m \dots a_n^n$$

permutando gl'indici inferiori:

$$0, 1, \dots (m-1) \mid m \dots n$$

indici, che, in vista di ciò che segue, abbiamo divisi in due gruppi di m e di $n-m+1$ indici. Ad ogni permutazione di questi $(n+1)$ indici corrisponde un termine del determinante. Ma tutti quei

termini che corrispondono a permutazioni degli $(n+1)$ indici nelle quali uno o parecchi indici del secondo gruppo siano trasportati nel primo, sono nulli, poichè contengono come fattori elementi nulli appartenenti al rettangolo indicato.

Rigettando adunque questi termini nulli, ottengonsi i rimanenti permutando nel termine iniziale positivo gli m indici inferiori del primo gruppo fra loro, e gli $n-m+1$ indici inferiori del secondo gruppo, parimenti fra loro.

Ora se nel termine iniziale positivo si permutano soltanto gl'indici inferiori del primo gruppo, si ottiene, colla applicazione dei dovuti segni, la somma di tutti i termini del determinante avente $a_m^m \dots a_n^n$ per fattore comune, cioè l'espressione:

$$a_m^m \dots a_n^n \cdot \Sigma \pm a_0^0 \, a_1^1 \dots a_{m-1}^{m-1}.$$

E se in questa somma di termini si permutano gl'indici inferiori del secondo gruppo e si fa la somma, coll'applicazione dei dovuti segni, si ottengono tutti quei termini del determinante che non son nulli; e si ottengono, appunto come dice l'equazione dianzi ammessa, in forma di prodotto di due determinanti.

Il teorema dimostrato può esprimersi brevemente così:

60) *Se gli elementi:*

$$a_m^k \, a_{m+1}^k, \dots a_n^k$$

sono tutti nulli per $k = 0, 1, \dots\dots (m-1)$, *il determinante* $A = \Sigma \pm a_0^0 \, a_1^1, \dots a_n^n$ *si risolve nel prodotto di due determinanti:*

$$A = \Sigma \pm a_0^0 \dots a_{m-1}^{m-1} \cdot \Sigma \pm a_m^m \dots a_n^n.$$

Se $a_1^0 = a_2^0 = \dots = a_n^0 = 0$, si ha:

61) .... $\Sigma \pm a_0^0 \dots a_n^n = a_0^0 \cdot \Sigma \pm a_1^1 \dots a_n^n$.

Se inoltre $a_2^1 = a_3^1 = \dots = a_n^1 = 0$, si ha:

62) ...... $\Sigma \pm a_0^0 \dots a_n^n = a_0^0 \, a_1^1 \cdot \Sigma \pm a_2^2 \dots a_n^n$.

Annullando successivamente in tal modo gli elementi del determinante si ottiene:

63) $\Sigma \pm a_0^0 \dots a_n^n = a_0^0 \, a_1^1 \dots a_{m-1}^{m-1} \cdot \Sigma \pm a_m^m \dots a_n^n$

e finalmente:

64) .... $\Sigma \pm a_0^0 \dots a_n^n = a_0^0 \, a_1^1 \dots a_n^n$.

Quest'ultima equazione ha luogo nell'ipotesi che siano nulli tutti gli elementi situati al di sopra della diagonale, mentre gli elementi situati al di sotto possono avere qualunque valore.

Il teorema generale 60) insegna ad esprimere il prodotto di due determinanti per mezzo di un determinante il cui ordine sia eguale alla somma degli ordini dei fattori, e nel quale intervengono altri elementi del tutto arbitrarii. Poichè il determinante A contiene un rettangolo di elementi nulli al di sopra della diago-

nale ed un rettangolo corrispondente di elementi arbitrarii al disotto, i quali ultimi elementi non compariscono affatto nel prodotto. Lo stesso teorema coi suoi corollarii 61)–63) insegna finalmente ad esprimere in varii modi un determinante in forma di determinante d'ordine superiore.

Se si prescinde dalle dimensioni degli elementi che compongono un determinante nato dal prodotto di due determinanti, questo prodotto si può mettere sotto la forma di un determinante dello stesso ordine, come per esempio:

$$[a_0^0\, b_0^0] = [a_0^0]\cdot[b_0^0].$$

Cercando di estendere questa equazione per sè evidente al caso di determinanti del secondo ordine, si trova:

$$\begin{vmatrix} a_0^0 b_0^0 + a_1^0 b_1^0, & a_0^1 b_0^0 + a_1^1 b_1^0 \\ a_0^0 b_0^1 + a_1^0 b_1^1, & a_0^1 b_0^1 + a_1^1 b_1^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0^0, a_1^0 \\ a_0^1, \ a_1^1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0^0, b_1^0 \\ b_0^1, b_1^1 \end{vmatrix}.$$

Infatti sviluppando si ottiene:

$$(a_0^0 b_0^0 + a_1^0 b_1^0)(a_0^1 b_0^1 + a_1^1 b_1^1) - (a_0^1 b_0^0 + a_1^1 b_1^0)(a_0^0 b_0^1 + a_1^0 b_1^1)$$
$$= (a_0^0 a_1^1 - a_1^0 a_0^1)(b_0^0 b_1^1 - b_1^0 b_0^1)$$

equazione facilmente verificabile.

Generalizzando questa equazione si arriva al *Teorema sulla moltiplicazione dei determinanti.*

65) *Posto* $C = \Sigma \pm c_0^0\, c_1^1 \dots c_n^n$ *e*

$$A = \Sigma \pm a_0^0\, a_1^1 \dots a_n^n, \quad B = \Sigma \pm b_0^0\, b_1^1 \dots b_n^n$$

l'equazione $C = A \cdot B$

è verificata dalla condizione

$$c_k^\lambda = a_0^k\, b_0^\lambda + a_1^k\, b_1^\lambda + \dots + a_n^k\, b_n^\lambda.$$

La condizione enunciata in questa proposizione, si può esprimere più brevemente così:

$$c_k^\lambda = \Sigma_m\, a_m^k\, b_m^\lambda.$$

Quindi il primo termine positivo del determinante composto cogli elementi c, è:

$$c_0^0 c_1^1 \dots c_n^n = \Sigma_{m_0} a^0_{m_0} b^0_{m_0} \cdot \Sigma_{m_1} a^1_{m_1} b^1_{m_1} \dots \Sigma_{m_n} a^n_{m_n} b^n_{m_n},$$

dove $m_0, m_1, \dots m_n$ denotano i numeri $0, 1, \dots n$. Questa equazione si può anche scrivere così:

$$c_0^0 c_1^1 \dots c_n^n = \Sigma_{m_0 m_1 \dots m_n} \left(a^0_{m_0} a^1_{m_1} \dots a^n_{m_n} \cdot b^0_{m_0} b^1_{m_1} \dots b^n_{m_n} \right).$$

Da questo primo termine del determinante derivano tutti gli altri permutando gl'indici inferiori degli elementi c. Ma con questa operazione però, vengono permutati sotto la sommatoria, sol-

tanto gl'indici superiori degli elementi a, mentre gl'indici degli elementi b restano invariati. Si ha dunque:

$$\Sigma\pm c_0{}^0 c_1{}^1 \dots c_n{}^n = \Sigma_{m_0 m_1 \dots m_n}\left[\left(\Sigma\pm a^0{}_{m_0} a^1{}_{m_1} \dots a^n{}_{m_n}\right)\cdot b^0{}_{m_0} b^1{}_{m_1} \dots b^n{}_{m_n}\right].$$

Il determinante $\Sigma\pm a^0{}_{m_0} a^1{}_{m_1} \dots a^n{}_{m_n}$ si annulla, in virtù del teorema 33), ogni qual volta diventano fra loro eguali due degl'indici $m_0, m_1, \dots m_n$, e con esso determinante si annullano pure i termini corrispondenti della somma costituente il secondo membro dell'equazione. Poichè dunque in questa somma mancano tutti quei termini in cui due o più indici $m_0, m_1, \dots m_n$ sono eguali fra loro, è chiaro che gl'indici $m_0, m_1, \dots m_n$ non sono altro che i numeri $0, 1, \dots n$ disposti in un ordine qualunque.

Ma il determinante $\Sigma\pm a^0{}_{m_0} a^1{}_{m_1} \dots a^n{}_{m_n}$ è in tale ipotesi, e in virtù del teorema 31), eguale a $\pm\Sigma\pm a_0{}^0 a_1{}^1 \dots a_n{}^n$, secondo che la permutazione $m_0, m_1, \dots m_n$ è derivata dalla $0, 1, \dots n$ con un numero pari o con un numero impari di inversioni. Ponendo pertanto nell'equazione in luogo del detto determinante, questo suo valore, e riportando il segno $\pm$ di questo valore sul prodotto $b^0{}_{m_0} b^1{}_{m_1} \dots b^n{}_{m_n}$ si trova:

$$\Sigma\pm c_0{}^0 c_1{}^1 \dots c_n{}^n = \Sigma\pm a_0{}^0 a_1{}^1 \dots a_n{}^n \cdot \Sigma_{m_0 m_1 \dots m_n} \pm b^0{}_{m_0} b^1{}_{m_1} \dots b^n{}_{m_n}.$$

Ora si è veduto che gl'indici $m_0, m_1, \dots m_n$ sono i numeri $0, 1, \dots, n$ in un ordine qualunque, e che il prodotto $b^0{}_{m_0} b^1{}_{m_1} \dots b^n{}_{m_n}$ ha nell'equazione segno positivo o negativo secondochè la permutazione $m_0 m_1 \dots m_n$ è derivata dalla permutazione $0, 1, \dots n$ mediante un numero pari o mediante un numero impari di inversioni, si ha dunque;

$$\Sigma_{m_0 m_1 \dots m_n} \pm b^0{}_{m_0} b^1{}_{m_1} \dots b^n{}_{m_n} = \Sigma\pm b_0{}^0 b^1{}_1 \dots b_n{}^n$$

epperò: $\Sigma\pm c_0{}^0 c_1{}^1 \dots c_n{}^n = \Sigma\pm a_0{}^0 a_1{}^1 \dots a_n{}^n \cdot \Sigma\pm b_0{}^0 b_1{}^1 \dots b_n{}^n.$

Il teorema ora stabilito comprende, fra gli altri, il caso particolare in cui gli elementi del determinante B siano eguali ai loro corrispondenti del determinante A. In questa ipotesi si ha:

$$C = A^2.$$

Ammettendo inoltre che nel determinante A gl'indici superiori denotino esponenti, A diventa il prodotto P considerato nel numero 15) e si ha:

$$C = P^2.$$

Supponendo finalmente che $a_0, a_1, \dots a_n$ siano le radici di una data equazione dell'$(n+1)^{mo}$ grado, P diventa una funzione alternante di queste radici, mentre P^2 è una funzione simmetrica delle medesime, la quale può quindi esprimersi razionalmente mediante

i coefficienti dell'equazione, od anche, come è noto, mediante le somme delle potenze delle radici. Ora se si pon mente al modo in cui sono formati gli elementi del determinante C, si riconoscerà che essi sono appunto le somme delle potenze delle radici dell'equazione dell'$(n+1)^{mo}$ grado. Il determinante C non è dunque altro che la funzione simmetrica P^2 delle radici, espressa per somme di potenze.

L'equazione $P=0$ è la condizione dell'eguaglianza di due radici dell'equazione data. Questa equazione di condizione venne dianzi espressa nella forma $C=0$, per somma di potenze delle radici. Potendosi ora esprimere le somme di potenze delle radici per mezzo dei coefficienti dell'equazione, ne risulta che la condizione dell'eguaglianza di due radici di una data equazione algebrica può essere espressa mediante un'equazione contenente i soli coefficienti dell'equazione data.

Non si vuol dire con ciò che si debba procedere nella guisa indicata per ottenere l'equazione di condizione dell'eguaglianza di due radici d'una equazione data, sotto la forma più acconcia. Se tal condizione dev'essere espressa mediante una relazione fra le somme delle potenze delle radici, non si conosce invero alcun processo più semplice; ma se all'incontro la detta condizione dev'essere espressa mediante i coefficienti dell'equazione data, l'algebra sa giovarsi all'uopo di altre applicazioni dei determinanti (*)

Come fra i tre determinanti specificati nel teorema 65) sussiste la relazione semplice $C=A \cdot B$, così fra i loro determinanti minori sussistono relazioni analoghe a quelle che esprimono la dipendenza degli elementi c dagli elementi a e b. Ci proponiamo di svolgere queste relazioni.

Per tal uopo pigliamo nuovamente le mosse dal sistema di equazioni lineari 1) che già per la seconda volta abbiamo presentato nel § 46) nella forma abbreviata:

66) .... $x^\mu = a_0^\mu x_0 + a_1^\mu x_1 + \ldots + a_n^\mu x_n$.

Queste sono sostituzioni mediante le quali vengono introdotte le nuove variabili $x_0, x_1, \ldots x_n$ al posto delle $x^0, x^1, \ldots x^n$. In luogo delle nuove variabili $x_0, x_1, \ldots x_n$ si possono introdurre nuovamente altre variabili $y^0, y^1, \ldots y^n$ mediante le sostituzioni:

67) .... $x_\lambda = b_\lambda^0 y^0 + b_\lambda^1 y^1 + \ldots + b_\lambda^n y^n$.

(*) Infatti l'Algebra prescrive di rendere omogenea l'equazione data, ponendo $\frac{x}{y}$ in luogo dell'incognita e moltiplicando per la più elevata potenza di y. In tal modo, dinotando con $f(x, y)$ una funzione omogenea intera di x e di y, l'equazione prende la forma $f(x, y)=0$. Ora per le radici eguali si ha $f'(x)=0$, $f'(y)=0$. Da queste due equazioni in $\frac{x}{y}$ bisogna eliminare l'incognita, il che si eseguisce nel modo più semplice, facendo uso dell'esposto metodo di Bezout.

Ora facendo nella 66) le sostituzioni 67), si ottengono le sostituzioni:

$$68) \ldots\ldots\ldots\; x^{\mu} = \mathrm{c}_{\mu}{}^{0}\, y^{0} + \mathrm{c}_{\mu}{}^{1}\, y^{1} + \ldots + \mathrm{c}_{\mu}{}^{n}\, y^{n},$$

con che le variabili primitive $x^0, x^1, \ldots x^n$ vengono direttamente collegate colle $y^0, y^1, \ldots y^n$ ultimamente introdotte.

Ma i coefficienti c in queste sostituzioni non sono più arbitrarii, come i coefficienti a e b nelle sostituzioni 66) e 67); essi dipendono dai primi mediante le relazioni:

$$69) \ldots\ldots\; \mathrm{c}_{k}{}^{\lambda} = a_0{}^{k}\, b_0{}^{\lambda} + a_1{}^{k}\, b_1{}^{\lambda} + \ldots + a_n{}^{k}\, b_n{}^{\lambda}.$$

Risolvendo le equazioni 68) si ottiene:

$$70) \ldots\ldots\; y^{\lambda} = \frac{1}{\mathrm{C}} \left\{ \mathrm{C}_0{}^{\lambda}\, x^0 + \mathrm{C}_1{}^{\lambda}\, x^1 + \ldots + \mathrm{C}_n{}^{\lambda} x^n \right\},$$

ottengonsi cioè le ultime variabili $y^0, y^1, \ldots y^n$ espresse in funzione delle primitive $x^0, x^1, \ldots x^n$.

Queste stesse espressioni possono ottenersi anche nel modo seguente (*). Si risolvano le equazioni 66) e 67) come segue:

$$71) \ldots\; x_k = \frac{1}{\mathrm{A}} \left\{ \mathrm{A}_k{}^{0}\, x^0 + \mathrm{A}_k{}^{1}\, x^1 + \ldots + \mathrm{A}_k{}^{n}\, x^n \right\}$$

$$72) \ldots\; y^{\lambda} = \frac{1}{\mathrm{B}} \left\{ \mathrm{B}_0{}^{\lambda}\, x_0 + \mathrm{B}_1{}^{\lambda}\, x_1 + \ldots + \mathrm{B}_n{}^{\lambda}\, x_n \right\}$$

e si sostituiscano i valori delle variabili $x_0, x_1, \ldots x_n$ ricavati dalle 71), nelle 72), con che si trova:

$$73) \ldots \left\{ \begin{aligned} y^{\lambda} = {} & \frac{1}{\mathrm{AB}} \left\{ \mathrm{A}_0{}^{0}\, \mathrm{B}_0{}^{\lambda} + \mathrm{A}_1{}^{0}\, \mathrm{B}_1{}^{\lambda} + \ldots + \mathrm{A}_n{}^{0}\, \mathrm{B}_n{}^{\lambda} \right\} x^0 \\ & + \frac{1}{\mathrm{AB}} \left\{ \mathrm{A}_0{}^{1}\, \mathrm{B}_0{}^{\lambda} + \mathrm{A}_1{}^{1}\, \mathrm{B}_1{}^{\lambda} + \ldots + \mathrm{A}_n{}^{1}\, \mathrm{B}_n{}^{\lambda} \right\} x^1 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{1}{\mathrm{AB}} \left\{ \mathrm{A}_0{}^{n}\, \mathrm{B}_0{}^{\lambda} + \mathrm{A}_1{}^{n}\, \mathrm{B}_1{}^{\lambda} + \ldots + \mathrm{A}_n{}^{n}\, \mathrm{B}_n{}^{\lambda} \right\} x^n. \end{aligned} \right.$$

Dovendo questa espressione di y^{λ} coincidere coll'espressione 70) per ogni sistema di valori delle variabili primitive $x^0, x^1, \ldots x^n$, bisogna che il coefficiente di x^k nella formola 70) sia eguale al coefficiente corrispondente della medesima variabile nella formola 73) cioè che si abbia:

$$\frac{\mathrm{C}_k{}^{\lambda}}{\mathrm{C}} = \frac{1}{\mathrm{AB}} \left\{ \mathrm{A}_0{}^{k}\, \mathrm{B}_0{}^{\lambda} + \mathrm{A}_1{}^{k}\, \mathrm{B}_1{}^{\lambda} + \ldots + \mathrm{A}_n{}^{k}\, \mathrm{B}_n{}^{\lambda} \right\}.$$

E se finalmente si rammenta che $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{B}$, si ha il teorema:

(*) Le $y^0, y^1, \ldots\, y^n$ possono esprimersi in duplice guisa per le $x^0, x^1, \ldots\, x^n$, una volta mediante le formole 68) ed un'altra mediante le formole 66) e 67).

74) *Posto* $C = \Sigma \pm c_0^0 \, c_1^1 \ldots c_n^n$ *e*

$$A = \Sigma \pm a_0^0 \, a_1^1 \ldots a_n^n, \quad B = \Sigma \pm b_0^0 \, b_1^1 \ldots b_n^n.$$

ed ammessa la condizione

$$c_k^\lambda = a_0^k \, b_0^\lambda + a_1^k \, b_1^\lambda + \ldots + a_n^k \, b_n^\lambda$$

non solo si ha $C = AB$, *ma fra i determinanti minori si ha inoltre la relazione:*

$$C_k^\lambda = A_0^k \, B_0^\lambda + A_1^k \, B_1^\lambda + \ldots + A_n^k \, B_n^\lambda.$$

Per porgere un esempio pigliamo dalle formole 35) i valori dei determinanti minori:

$$A_0^0 = (a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2), \quad A_1^0 = -(a_0^1 a_2^2 - a_2^1 a_0^2), \quad A_2^0 = (a_0^1 a_1^2 - a_1^1 a_0^2).$$

Ponendo $k = \lambda = 0$, in virtù del teorema 74) e di questi valori dei determinanti minori, si ha l'equazione identica:

75) $$\left\{ \begin{aligned} & (a_0^1 b_0^1 + a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_2^1) \, (a_0^2 b_0^2 + a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2) \\ & - (a_0^2 b_0^1 + a_1^2 b_1^1 + a_2^2 b_2^1) \, (a_0^1 b_0^2 + a_1^1 b_1^2 + a_2^1 b_2^2) \\ = {} & (a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2) \, (b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2) + (a_0^1 a_2^2 - a_2^1 a_0^2) \, (b_0^1 b_2^2 - b_2^1 b_0^2) \\ & + (a_0^1 a_1^2 - a_1^1 a_0^2) \, (b_0^1 b_1^2 - b_1^1 b_0^2). \end{aligned} \right.$$

Ammettendo inoltre che gli elementi b divengano eguali ai corrispondenti elementi a, l'ultima equazione si converte in questa

$$\begin{aligned} & (a_0^1 a_0^1 + a_1^1 a_1^1 + a_2^1 a_2^1) \, (a_0^2 a_0^2 + a_1^2 a_1^2 + a_2^2 a_2^2) \\ & - (a_0^1 a_0^2 + a_1^1 a_1^2 + a_2^1 a_2^2)^2 \\ = {} & (a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2)^2 + (a_0^1 a_2^2 - a_2^1 a_0^2)^2 + (a_0^1 a_1^2 - a_1^1 a_0^2)^2. \end{aligned}$$

Questa equazione, sotto certe condizioni, esprime in geometria analitica il teorema, che il quadrato dell'area d'un triangolo è eguale alla somma dei quadrati delle aree delle projezioni normali del triangolo stesso, sopra tre piani fra loro ortogonali (*).

Questa non è che una delle molte applicazioni che si posson fare dell'equazione identica dianzi trovata.

(*) *Nota del traduttore.* Vedi – *Vorlesungen über Analytische Geometrie des Raumes von* D.r Otto Hesse – 2.a edizione – Lezione 1.a pag. 8.





